四庫全書

子部

幾何補編自序

天學初函內有幾何原本六卷止於測面其七卷以後未經譯出蓋利氏既歿徐李云亡遂無有任此者耳然歴書中往往有雜引之處讀者或未之詳也壬申春月偶見館童屈篾為燈詫其為有法之形（其製以六圈成一燈每圈勻為六折並周天六十度之通弦故知其為有法之形而可以求其比例然測量諸書皆未言及）乃覆取測量全義量體諸率實攷其作法根源（法皆自楞剖至心即皆成錐體以求其分積則總積可知）以補原書之未備而原書二十等面體之

算鄉固疑其有誤者今乃徵其實數測量全義設二十等面體之邊一百則其容積五十二萬三八〇九今以法求之得容積二百一十八萬一八二八相差四倍又幾何原本理分中末線亦得其用法幾何原本理分中末線但有求作之法而莫知所用今依法求得十二等面及二十等面之體積因得其各體中稜線及輳心對角諸線之比例又兩體互相容及兩體與立方立圓諸體相容各比例並以理分中末線為法乃知此線原非徒設則西人之術固了不異人意也爰命之曰幾何補編

半徑心甲其三之二即外切圓之半徑乙心或心丙

又法以邊半之丙甲自乘得數丙庚方取其三之一開方甲壬小方得容圓之半徑壬癸或甲癸俱與心甲等又取自乘數丙庚方三分加一丙庚方加壬甲小方并而開方得外切圓之半徑丙心

論曰三邊角等則半邊之角六十度丙心甲角其餘角三十

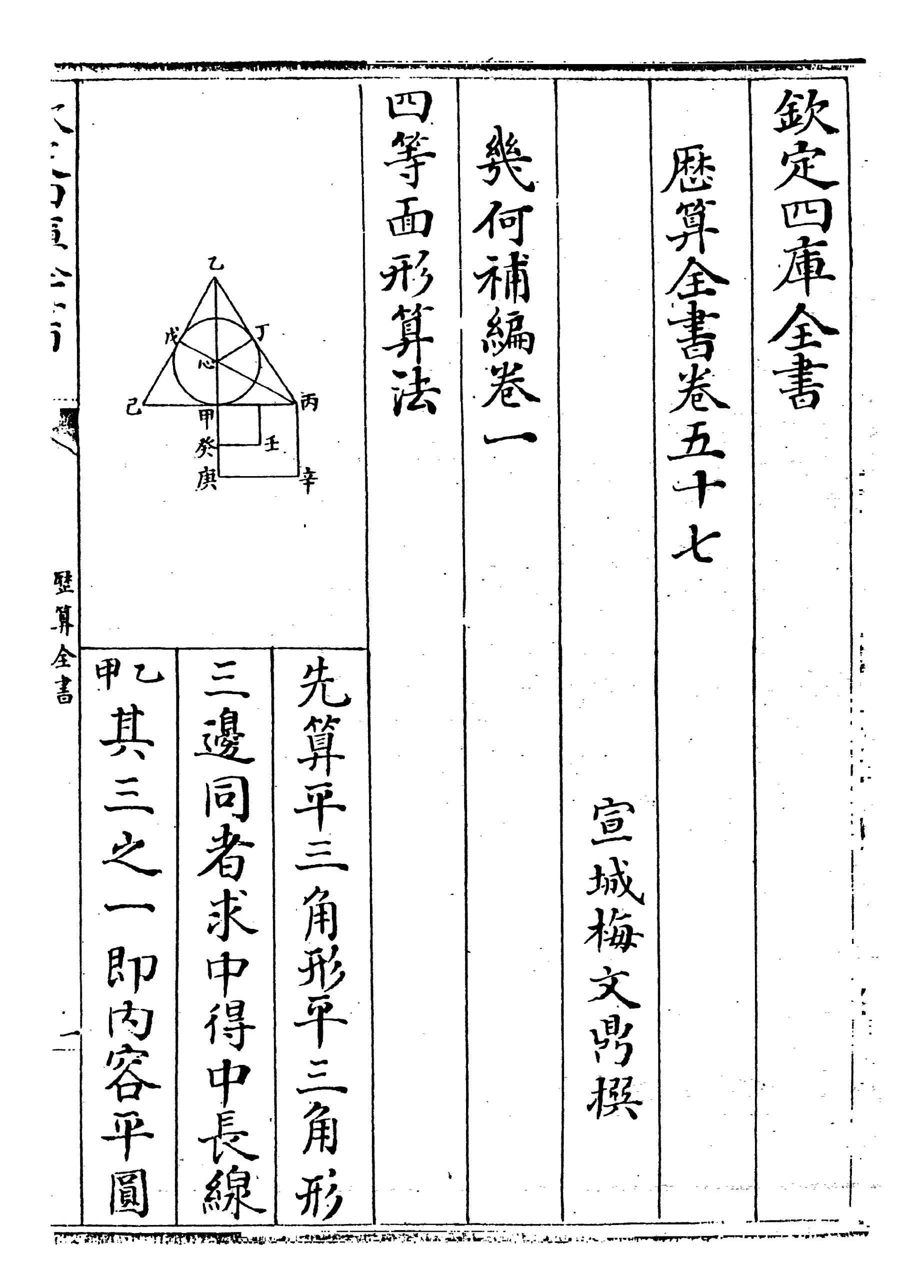
欽定四庫全書

歷算全書卷五十七

宣城梅文鼎撰

幾何補編卷一

四等面形算法



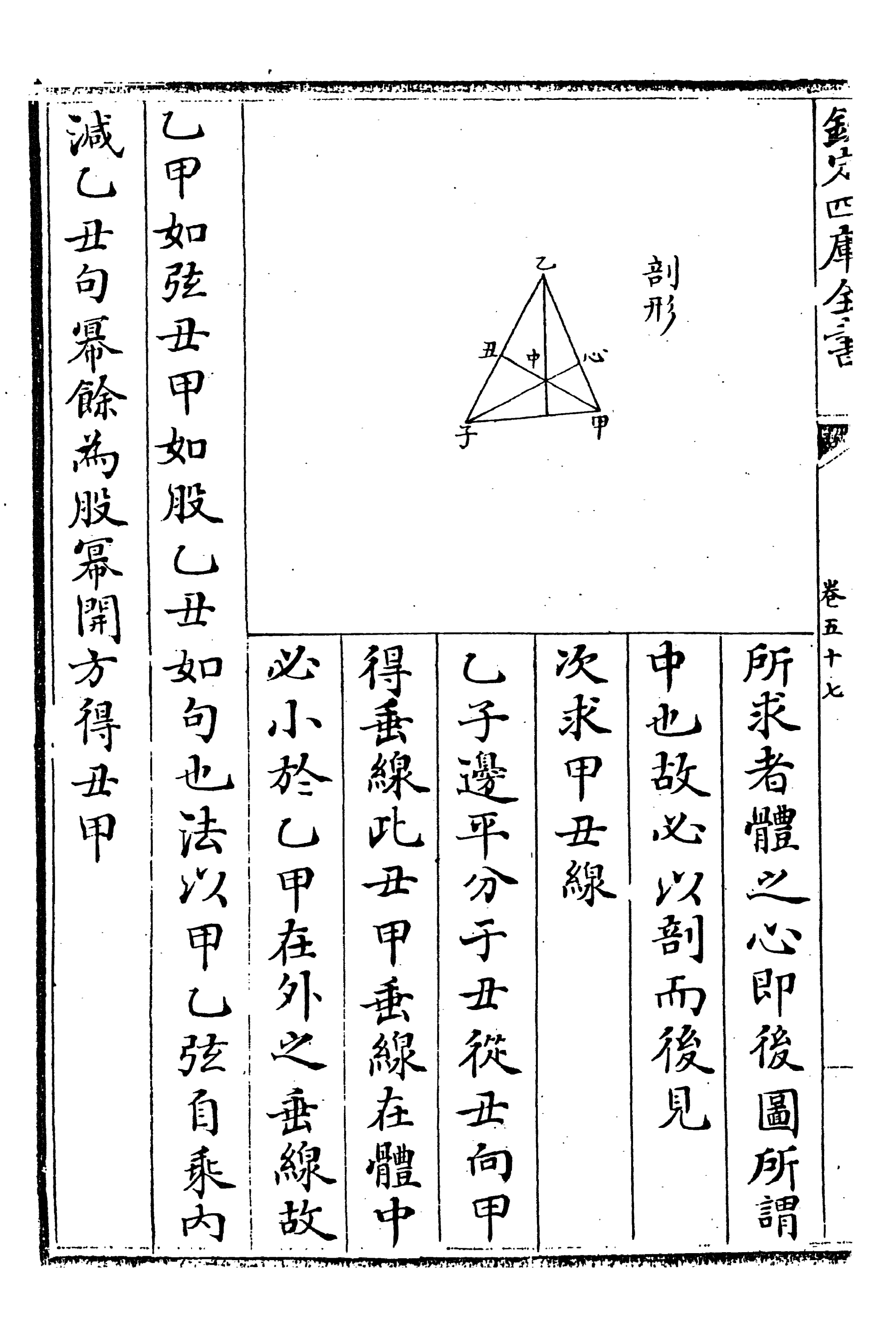
先算平三角形平三角形三邊同者求中得中長線乙甲其三之一即內容平圓

心甲既為心丙之半則心甲一心丙必二而丙戊必三矣乙甲同何也以乙心與丙心同為二心甲與心戊同為一也聯心乙二與心甲一豈不成三

今以內圓半徑為股心甲外圓半徑為弦心丙三邊之半為句丙甲成心甲丙句股形則心丙自乘內有心甲及句冪股冪弦冪甲丙句冪兩自乘之積也而心甲股與心丙弦既為一與二之比例則心甲之冪一心丙之冪必四也以心甲股冪一減心丙弦冪四其餘積三即丙甲句冪矣故心甲

度（心丙甲角）内容圓半徑為三十度之正弦（心甲）外切圓半徑如全數（丙心）其比例為一與二故内容圓半徑（心甲）正得外切圓半徑（丙心）之半也（此論可解前一條）

形内丙心甲與乙心丁兩小句股形相等又並與乙甲丙大句股形相似（何則乙角丙角並分原等角之半丁甲等為正角則三角皆等而邊之比例等）而大形之句（丙甲）既為其弦（乙丙）之半則小形之句（心丁亦即心甲）自必各為其弦（心乙亦即心丙）之半故知心甲（原同心丁）為乙甲之半也



所求者體之心即後圖所謂中也故必以剖而後見

次求甲丑線

乙子邊平分于丑從丑向甲得垂線此丑甲垂線在體中必小於乙甲在外之垂線故乙甲如弦丑甲如股乙丑如句也法以甲乙弦自乘内減乙丑句冪餘為股冪開方得丑甲

之冪一則丙甲之冪三心丙之冪四今先得邊故以丙甲三為主而取其三之一為心甲股冪又於丙甲三加三之一為四即成心丙弦冪也此論可解後一條

以上俱明三等邊平面之比例

今作四面等體求其心

法自乙頂向子向甲剖切之成乙子甲三角面

合形

子 乙 巳 甲 丙

心者面之心中者體之心

前圖所謂心者面之心也今

論曰心甲與心中猶甲丑與乙丑也甲丑冪與乙丑冪為六與三則心甲與心中之冪亦如二與一

又捷法心中之冪一心之冪二則乙丑之冪六即丙甲而心丙之冪八亦即乙心俱倍數

但以半邊乙丑或丙甲之冪取六之一即心中冪開方得心中即四等面形內容小渾圓之半徑也心中線者即各面之心至體心也故為內容小渾圓半徑

以心中之冪一句加乙心之冪八股并之為弦冪九開

又法準前論乙丑之冪三（即丙甲皆半邊故）則乙甲之冪九（乙甲三倍大于心甲故心甲冪一則乙甲冪九）以三減九餘六亦即甲丑股冪矣

以開方得甲丑

捷法倍原半邊（甲丙）自乘數以開方得（甲乙）中垂線　或半原邊（丙己）自乘之數開方亦得（甲丑）　丙甲之冪三（乙丑同）則甲丑之冪六而丙己之冪十二也（甲丑與丙己冪積之比例為一與二）

次求心中線

捷法但半心甲自乘即心中冪

即四等面形之一面其高為中心即內容小渾圓之半徑其中乙等三楞線三倍大於中心之高即外切渾圓之半徑

取四等面形全積捷法

先取面羃即前圖乙巳丙平面依前比例求其羃以內容圓半徑心中乘之得數四因三歸見積

法曰丙甲半邊之羃三則甲乙中長之羃九開方得中長以乘丙甲得乙巳丙三等邊之羃積即四等面形

方得中乙或中子或用前總圖則為甲丙為甲己並同是即四等面形外切渾圓之半徑也外切圓之冪九中乙內切圓之冪一心中得其根之比例為三與一故四等面形內容渾圓之徑一則其外切渾圓之徑三

又捷法但以乙丑半邊之冪加五即二之一為中乙或中子等冪開方得外切圓之半徑蓋乙丑之冪六中乙之冪九其比例為一有半也

此四邊不等形又為三角立錐形為四等面形四之一各自中切至邊線成此形其底三邊等

又捷法以丙巳全邊（亦即丙乙）乘乙心再以中心乘即得本形全積（乙心為心甲之倍數丙巳為丙甲之倍數用以相乘則得丙甲乘心甲之四倍數也）

邊設一百

依上法求容

丙巳邊一百其冪一萬丙甲半邊五十其冪二千五百三因之得七千五百

之一面也

次求本積四之一即各面輳心剖裂之形如右圖

丙申半邊之羃六則中心之羃一開方得中心高以乘所得面羃而三分取其一即為四等面形四之一於是四乘之即為全積也

又捷法以丙甲乘心甲又以中心乘之即得本形四之一即同三除以心甲為乙甲三之一故也

此帶縱小立方形與右圖四等面形四之一等積

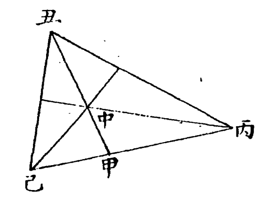
一十一萬七千八百五十一弱與歷書微不同

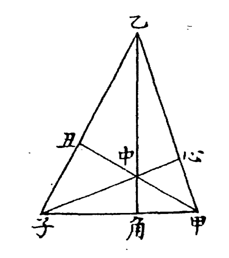
四等面體求心捷法

準前論心中冪一則心甲冪二中乙冪九乙丑冪六以句股法考之則中甲與中丑之冪俱三也何也心中甲句股形以中甲為弦故心中句冪一心甲股冪二并之為中甲弦冪三也而乙中丑句股形以中丑為句故乙中弦冪九內減乙丑股冪六其餘為中丑

為乙甲中垂之冪丙甲股冪減丙巳弦冪得句冪也丙巳亦即丙乙　平方開之得八十六六〇二五為乙甲其三之一得二十八八六七五為心甲　其三之二得五十七七三五〇為心乙　又置丙甲冪二千五百取六之一為心中冪得四百一十六六六不盡　開方得心中之高二十零四一二四亦即內容渾圓之半徑

依上法以丙巳全邊一百乘乙心五十七七三五〇得五千七百七十三半　又以心中二十零四一二四乘之得全積





而丙巳與申成一點故從丙巳原邊依楞直剖至乙子對邊即成甲丑線其線即所剖面之側立形

此圖即前圖甲丑線所切之面蓋面側視則成線矣

句冪亦三也

由是徵之則中丑與中甲正相等但如法求得甲丑線折半得中點即爲體心

又捷法取乙丑冪即原設邊折半自乘半之爲中丑冪開方得中丑亦得甲中或乙子全邊自乘取八之一爲甲中冪亦同中丑即原邊乙子距體心之度甲中即原邊丙巳距體心之度而中爲體心

想甲點在丙巳邊折半之處今從側立觀之則線化爲點

横剖亦三依丙巳楞剖至丑而平分子乙邊于丑一也依子丙邊剖而平分乙巳邊二也依子巳楞邊剖而平分丙乙邊三也其所剖之面並相似皆以中點為三對角垂線相交之心

一率	一一七八五一	例容
二率	一〇〇〇〇〇	例邊之立方積
三率	一〇〇〇〇〇	設容
四率	八四八五二九〇	設邊之立方積

原設四等面全形令依子丑乙楞剖至甲則成縱剖圖故甲點內有丙巳線若依丙甲巳楞剖至丑則成橫剖圖故丑點內有子乙也

縱剖有三依子乙楞剖至甲而平分丙巳邊於甲一也依丙乙楞剖而平分子巳邊二也依巳乙楞剖而平分子丙邊三也

邊一百

積一十一萬七八五一

積一百萬

邊二百〇三九六

內容渾圓半徑二十〇四一二四

內容渾圓全徑四十〇八二四八

外切渾圓半徑六十一二一〇〇

外切渾圓全徑一百念二四二〇〇

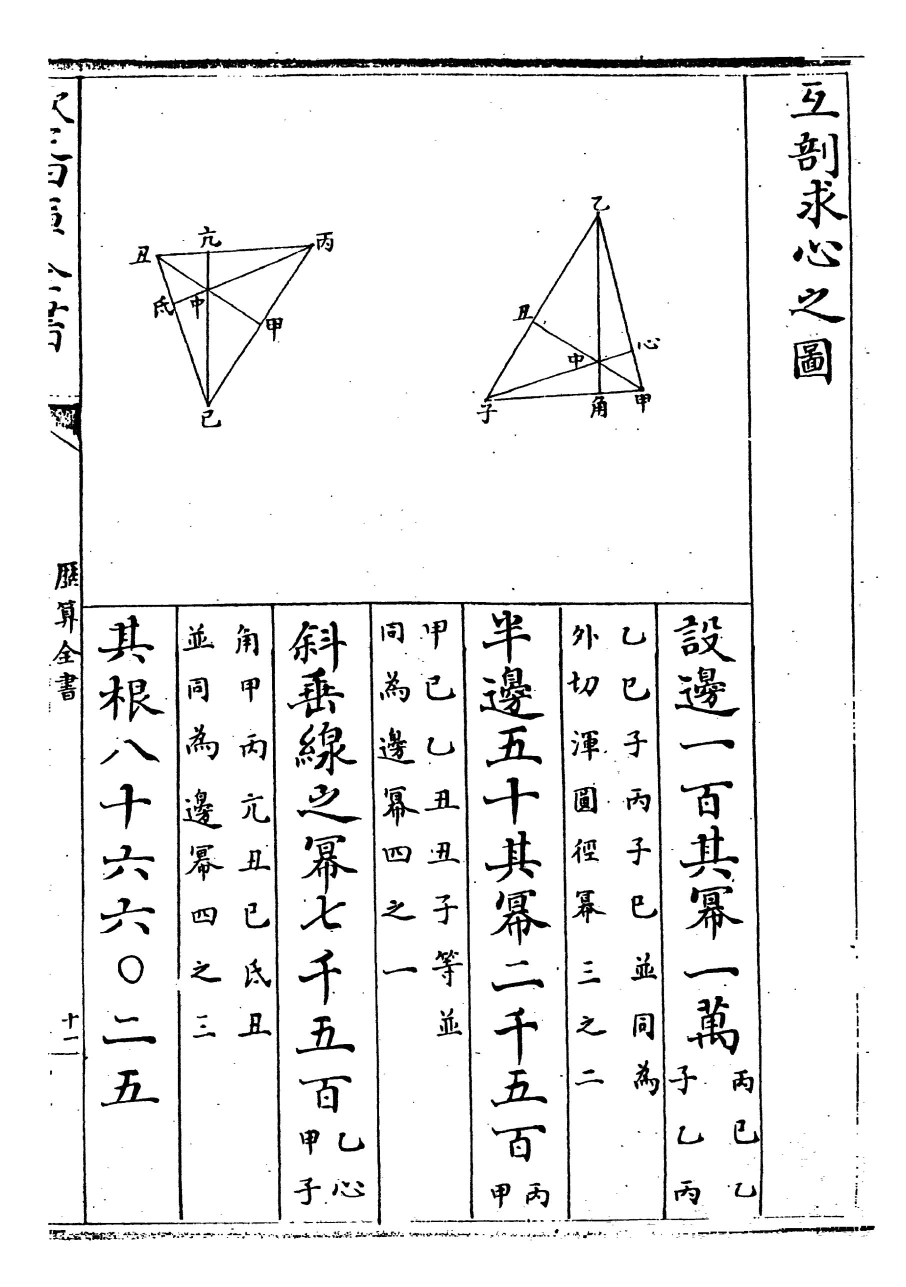
開方得根二百〇四弱為公積一百萬之四等面體楞
與比例規解合
若商四數則其平廉積四十八萬長廉積九千六百其
隅積六十四共得四十八萬九千六百六十四不足四
千三百七十四為少百分之一弱故比例規解竟取整
數也
計開
四等面諸數

斜垂線三之一二十八八六七五其冪八百三十三三三即外切渾圓徑冪十八之一為邊冪十二之一即各面內容平圓半徑心甲角甲亢丑氐丑並同

斜垂線三之二五十七七三五〇其冪三千三百三十三三三乙心子角丙亢巳氐並同

內容渾圓半徑二十〇四一二四其冪四百一十六六六不盡為邊冪二十四之一即外切渾圓三十六之一即分體中高心中角中亢中氐中

互剖求心之圖



設邊一百其冪一萬丙巳乙子乙丙乙巳子丙子巳並同為外切渾圓徑冪三之二

半邊五十其冪二千五百丙甲甲巳乙丑丑子等並同為邊冪四之一

斜垂線之冪七千五百乙心甲子角甲丙亢丑巳氐丑並同為邊冪四之三

其根八十六六〇二五

二率　四等面之邊一百
三率　渾圓徑一百
四率　内容四等面邊八十一六四九六
又捷法渾圓徑冪一萬五千則内容四等面邊冪一萬
或内容立方面之斜亦同為渾圓徑冪三之二
若設渾圓徑一百其冪一萬則内容四等面邊之冪六
千六百六十六六六六亦三之二也
平方開之得八十一六四九六六為四等面邊即内容立

並同

若內圓全徑之冪則一千六百六十六六六六為邊冪六之一外切渾圓徑冪九之一

外切渾圓半徑六十一二三七二其冪三千七百五十

即分體之立面楞乙中子中丙中巳中並同四因之為渾圓全徑冪

一萬五千其徑一百二十二四七四四

又外切正相容之立方其冪五千為四等面邊冪之半

即斜方之比例又為外切渾圓徑冪三之一

一率　外切渾圓徑一百二十二四七四四

方之斜内容立方面冪三千三百三十三三三為渾圓
徑冪三之一即方斜之半冪亦即四等面邊冪之半
平方開之得五十七七三五〇是為渾圓徑一百内容
立方之邊亦即渾圓内容立方立方又容小圓之徑
若於四等面内又容渾圓則其徑冪一千一百一十一
一一為渾圓徑冪九之一為四等面冪六之一立方面
冪三之一
開得平方根三十三三三不盡冪九之一則其根必三之一也為内容

小渾圓之徑以徑乘冪得三萬七千〇三十七為徑上立方積　以十一乘十四除得二萬九千一百〇〇半為圓柱積　柱積取三之二得一萬九千四百為小渾圓積得大渾圓二十七之一　以小渾圓積二十七因之得五十二萬三千九百為四等面外切大渾圓積即徑一百之渾圓積也

互剖求心法

凡四等面體任以一尖為頂則其垂線為自尖至相對

之平面心亦即平面容圓之心而以餘三尖為底其垂線至底之點旁距三尖皆等即乙心丙心巳心三線之距心皆等而以子尖為頂其垂線為子中心其底為乙丙巳平三角面餘做此此為正形各尖皆可為頂其法並同若以子中心垂線為軸而旋之則成圓角體

凡四等面體任平分一邊而平分之點為頂以作垂線則其垂線自此點至對邊之平分點而以對邊為底底無面但有邊底邊與頂邊相午直正如十字形

假如以子乙邊平分於丑以線綴而懸之則其垂線至

所對丙巳邊之平分正中為甲點其線為丑中甲而子乙邊衡於上則丙巳邊縱於下正如十字無左右之欹亦無高下之微差也

若以丑中甲垂線為軸旋之則成圓柱體

凡四等面體以其邊為斜線而求其方以作立方則此立方能容四等面體

何以知之曰准前論以一邊衡於上而為立方上一面之斜則其相對之一邊必縱於下而為立方底面之斜

捷法四等面之邊自乘折半開方即正相容之立方根（即弦倍句股意）設邊一百其冪一萬折半五千即為立方一面之積求其立方根得七十〇七一〇六即丑中甲垂線之高

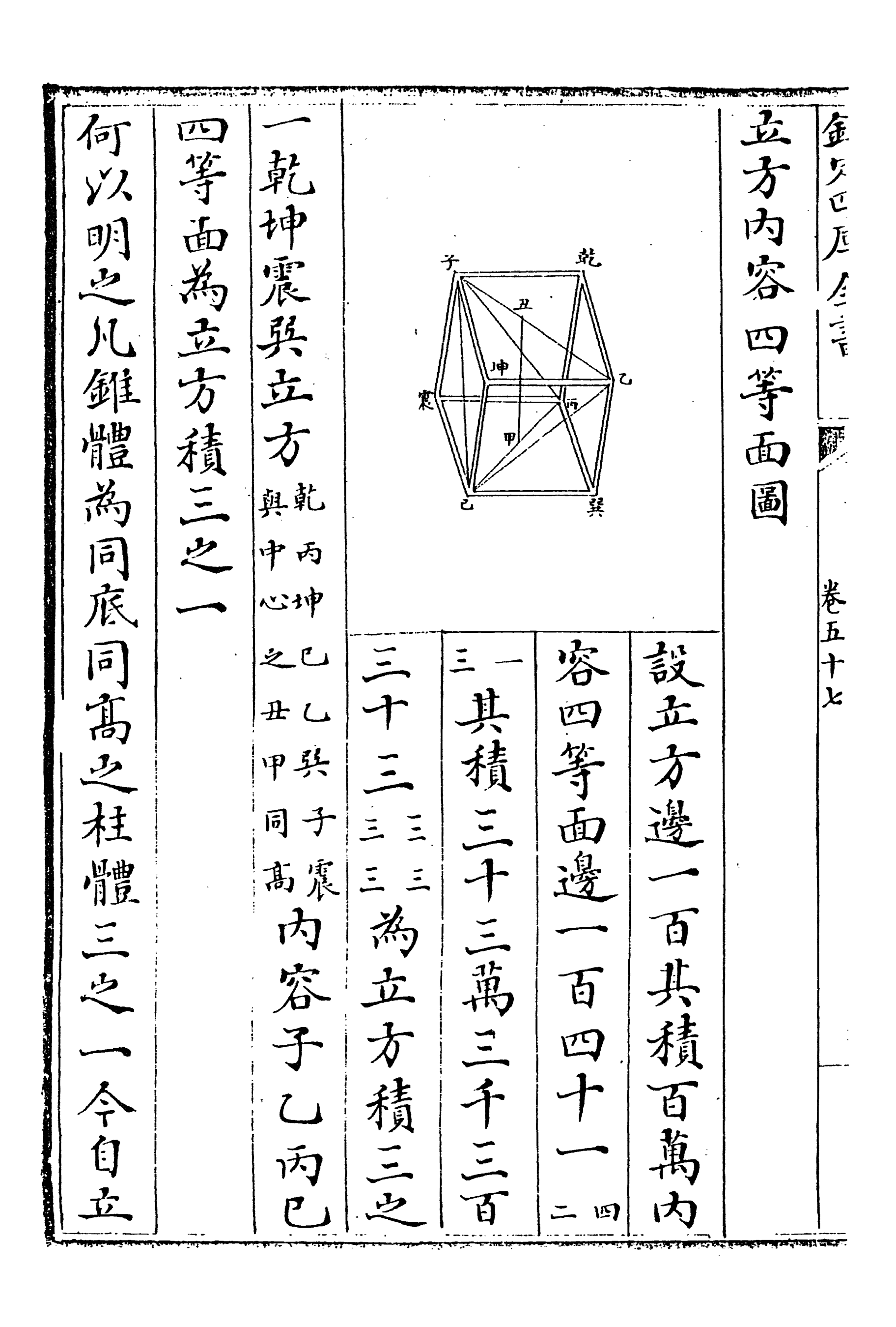
若以此作容四等面之圓柱則其高七十〇七一〇六同立方之方根而其圓徑一百同立方面之斜此圓柱內可函立方

其乙中子中中等為自四等面體心至各角之線又為立

矣又此二邊之勢旣如十字相午直而又分於上下為立方上下兩面之斜線然則自上面之各一端向底面之各一端聯為直線即為四等面之餘四邊亦即立方餘四面之斜如此則四等面之六邊各為立方形六面之斜線而為正相容之體

如前所論圓角體圓柱體雖亦能容四等面形而垂線皆小於圓徑故不得為正相容

立方内容四等面圖



設立方邊一百其積百萬内容四等面邊一百四十一四二一三其積三十三萬三千三百三十三三三三三為立方積三之一

乾坤震巽立方乾丙坤己乙巽子震與中心之丑甲同高内容子乙丙己四等面為立方積三之一

何以明之凡錐體為同底同高之柱體三之一今自立

方心至各角之線又為外切渾圓之半徑又為四等面分為四體之楞線又為立方分為六方錐之楞線

又捷法以四等面之邊冪加二分之一開方即外切正相容之渾圓徑亦即立方體內對角線如自乙至震折半為自心至角線

四等面設邊一百其冪一萬用捷法二分加一得一萬五千為外切正相容之渾圓全徑冪開方得一百二十二四七四四為渾圓全徑折半得六十一二三七二為渾圓半徑

方之乙角依斜線剖至丙巳戌乙丙巳巽三角錐以丙巳巽立方之半底為底又自子角斜剖至丙巳戌子丙巳震錐以丙巳震立方之半底為底合丙半底則與立方同底矣而子震與乙巽之高即立方高也是此二錐得立方三之一矣

又自子乙斜線斜剖至巳角成倒錐以子乙坤立方之半頂為底以坤巳立方高為高又自子乙斜剖至丙角亦成倒阜之錐以子乙乾立方之半頂為底以乾丙立

方高為高與前二錐同亦三之一也

合此二錐共得立方三之二則其餘為子乙丙巳四等

面體者必立方三之一矣

准此論之凡同邊之八等面積四倍大於四等面積何

以知之以此所剖之四錐體合之則為八等面之半體

皆以剖處為面而其邊其面皆與四等面等是同邊之

體也而八等面之半體既倍大於四等面則其全體必

四倍之矣

設八等面邊一百四十一四二一三與四等面同邊則八等面之積一百三十三萬三千三百三十三三三不盡為四等面之四倍

若設四等面邊一百則其外切之立方面冪五十立方根七十〇七一〇六以根乘冪得立方積三十五萬三千五百五十三四等面積一十一萬七千八百五十一為立方積三之一

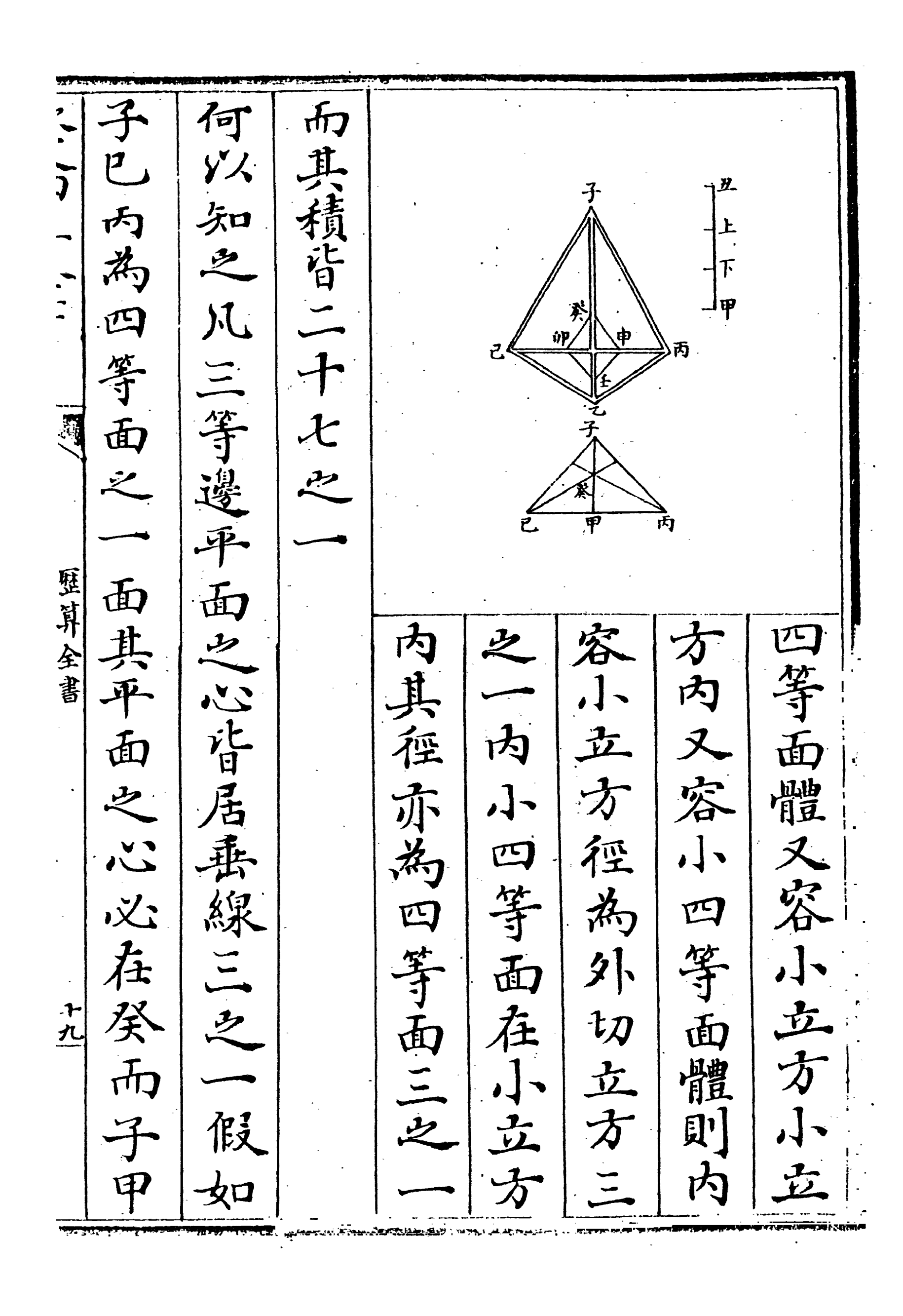
推得八等面邊一百其積四十七萬一千四百〇四

此同邊之比例

若立方內容之八等面則其積為立方內容之四等面二之一何以知之八等面與立方同高則其積為立方六之一故也

設立方邊一百內容八等面邊七十〇七一〇六其積一十六萬六千六百六十六為四等面之半若設立方邊七十〇七一〇六則內容八等面積五萬八千九百二十五半其邊五十

垂線分三之一為癸甲其餘三面盡同而內容之小立方必以其下方之兩角縱切子巳丙之癸心及乙巳丙之壬心其上方之兩點必橫切於子乙巳之卯心及子乙丙之申心而立方內容之小四等面亦必以其四角同切此四點也令壬癸兩點既下距丙巳線為其各斜垂線三之一而卯申兩點又上距子乙線之斜垂線亦三之一則其中所餘三之一必為立方所居也而內小立方不得不為子乙與丙巳相距線三之一矣



四等面體又容小立方小立方內又容小四等面體則內容小立方徑為外切立方三之一內小四等面在小立方內其徑亦為四等面三之一而其積皆二十七之一

何以知之凡三等邊平面之心皆居垂線三之一假如子巳丙為四等面之一面其平面之心必在癸而子甲

問癸點爲三之一者斜面之垂線也小立方者直立線也何以得同爲三之一乎答曰癸點所居三之一雖在斜面而子乙縱線與丙巳橫線上下相距必有垂線直立於其心此直立垂線即前圖之甲丑與外切立方線同高者也丑甲中垂線以上停三之一之上點與卯申平對以下停三之一之下點與壬癸平對依句股法弦與股比例同也然則丑甲線之中停即小立方之所居矣

又丑甲者即外切立方之高也故知小立方徑為外切立方徑三之一

又小四等面在小立方内以其邊為小立方之斜而縱横邊相午對如十字其中心亦以丑甲線之中停為其軸其斜面之勢一切皆與大四等面同而丑甲者亦大四等面之軸也小四等面之中軸既為丑甲三之一其餘一切皆三之一矣

夫體積生於邊者也邊為三之一者面必為九之一體

必為二十七之一無疑也

准此論之渾圓在四等面內者亦必為外切渾圓二十七之一其徑亦三之一也何也渾圓之切點與小立方小四等面之切點並同也

以此推知小立方與小四等面在大四等面內或居小渾圓內以居大四等面內其徑積並同

求體積

渾圓徑一百其徑上立方一百萬依立圓法以十一乘

十四除得七十八萬五千七百一十四為圓柱積仍三分取二得五十二萬三千八百○九為渾圓積

內容立方面冪三千三百三十三三三其邊五十七七三五○以邊為高乘面得一十九萬二千四百五十○為內容立方積

內容四等面體邊冪六千六百六十六六六其邊八十一六四九六

依前論四等面體為立方三之一得六萬四千一百五

三分取一得一萬九千四百為立方內之四等面內容小渾圓積為大渾圓積二十七之一若先有內小渾圓積但以二十七因之得大渾圓積

依此論之凡渾圓內容立方立方內又容四等面體四等面內又容小渾圓其內外相似之大小二體皆二十七之比例也

又捷法用方斜比例

立方面之斜設一百其冪一萬則其方冪五千用三

十〇為四等面積

立方內容小渾圓以立方之邊為徑五十七七三五〇依立圓法以立方積十一乘十四除得一十五萬一千二百一十為圓柱積取三之二得一十〇萬〇八百六十六為小立圓積

四等面內容小渾圓徑冪一千一百一十一一一其徑三十三三三三以徑乘冪得徑上立方積三萬七千〇三十七以十一乘十四除得二萬九千一百〇半為圓柱積又

亦即四等面體心至各角之線

八等面形圖註

第一合形

甲丁 甲丙 甲己 甲戊

丁丙 丙己 己戊 戊丁

戊乙 己乙 丁乙 丙乙

以上形外之楞凡十有二即根數也其長皆等

因之得一萬五千開方得立方對角斜線即為外切渾圓全徑

立方面之斜一百即立方内容四等面之邊

立方體對角斜線一百二十二四七四四即立方外切渾圓之全徑亦即四等面外切渾圓全徑半之得六十一二三七三即立方外切渾圓半徑亦即立方體心至各角之線

甲丁丙巳戊為上半俯形
丁丙巳戊乙為下半仰形
右二形各得合形之半皆從
丁戊楞横剖至巳丙
一俯一仰皆方錐扁形丁丙
巳戊為方錐之底其邊皆等
其從四角凑至頂之楞皆與
底之邊等

或設一百為一楞之數則十二楞皆一百也

甲丁戊　甲戊巳　甲巳丙　甲丙丁　丙丁乙

巳丙乙　戊巳乙　丁戊乙

以上形周之分面凡八皆等邊平三角形也其容積其邊皆等

或設一百為邊數則三邊皆一百而形周之分面八皆三邊邊皆一百也

第二橫切形二

橫切之面

第四橫切之面一直切之面二

因橫剖得正方平面在立方錐以此為底倒方錐以此為面在合形則為腰圍其巳丁及丙戊兩對角斜線相交於心即兩直切之界也心即合形中心因直剖得斜立方面二其巳丁及戊丙橫對角線即橫切之界其從甲至乙垂線即直剖之界如立面在前後

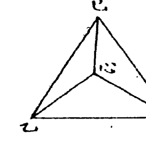
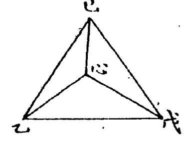
第三直切形四

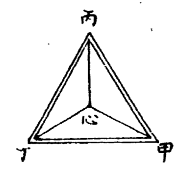
從甲尖依前後楞直剖過丁已至乙尖成左右兩形

從甲尖依左右楞直剖過丙戊至乙尖成前後兩形

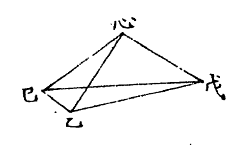
此四形者一切皆與仰俯二形同但彼為眠坐之體故為方錐仰者即倒卓方錐而此則立體即如打倒方錐之形也

分形正面



分形側面



因横剖及兩直剖分總形為八皆三角錐形也

皆以等邊平三角形面為錐形之底而以横直剖線相交處之點為其鋭頂即合形之中心也

其自頂心至角之楞皆等皆邊線之方斜比例也（底線為方則此線為其斜之半）而此楞線又即為八等面形之外切

互剖之形則此線為左右直剖之界彼此互為之也亦即為全形之中高徑線

以此知八等面之中高線為方斜之比例

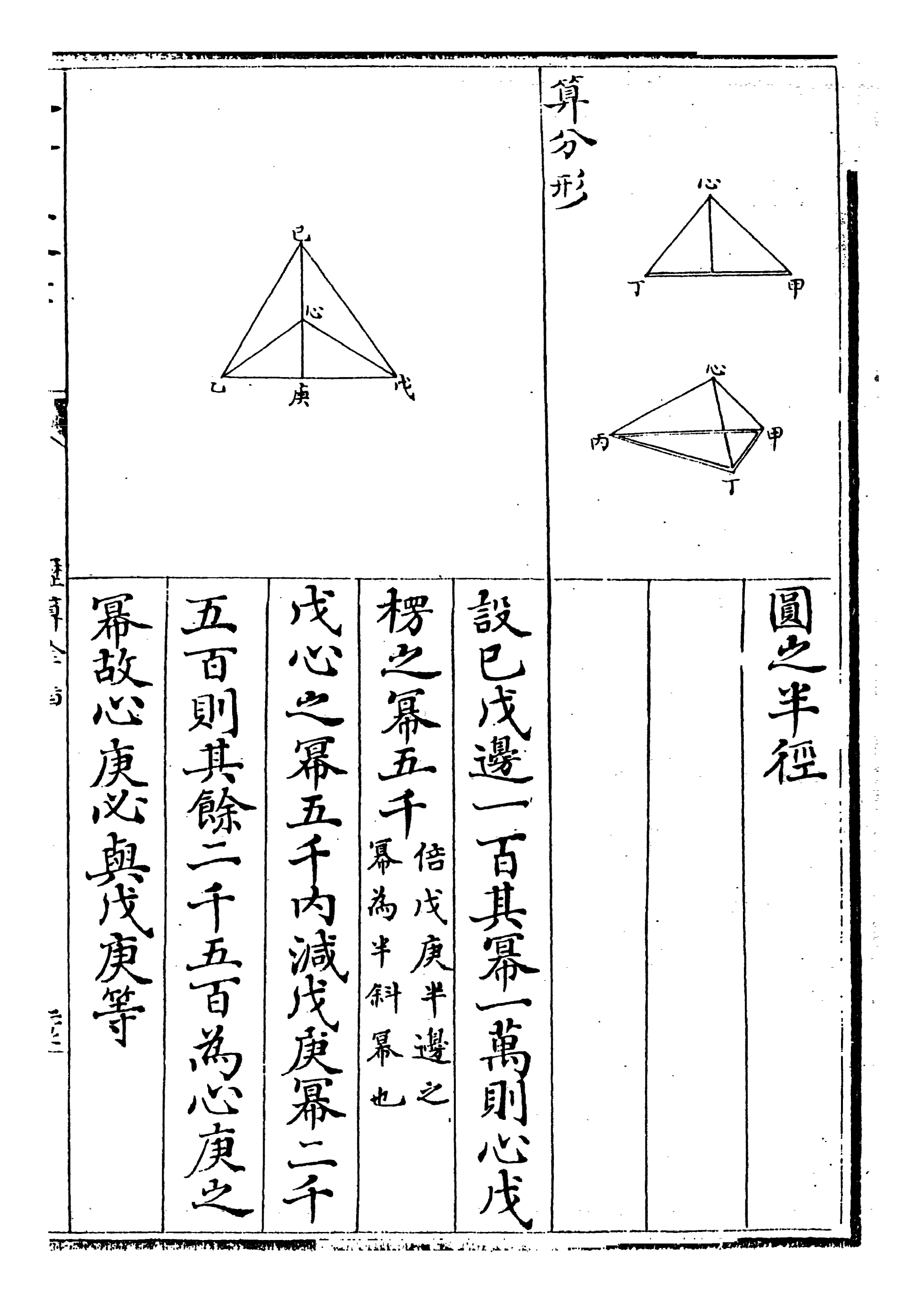
第五分形

甲 丙 心 戊 乙

從心頂對己庚楞直剖至庚分形為兩則其中剖處成三角平面

己庚者乙已戊等邊三角平面之中垂線也其冪為邊四之三設邊一百之冪一萬則己庚之冪七千五百

庚辛者平面三角容圓之半徑也得己庚三之一其冪則九之一也己庚之冪七千五百則庚辛之冪八百三十三三三



圓之半徑

設巳戊邊一百其冪一萬則心戊楞之冪五千（倍戊庚半邊之冪為半斜冪也）戊心之冪五千內減戊庚冪二千五百則其餘二千五百為心庚之冪故心庚必與戊庚等

辛點即各三角平面之中心

以庚辛冪八百三十三三三三減心庚冪二千五百得心辛冪一千六百六十六開方為心辛即分形之中高也求得分形中高四十〇八二四七

依平面三等邊法設邊一百其中長綫八十六六〇二五其冪積得四千三百三十〇一二五〇 取平冪三之一得一千四百四十三三七五〇以乘中高得分形積五萬八千九百二十五三五一三 再以八因之得總積四十七萬一千

四百○二八一○四與總算合

設八等面之邊一百其冪一○○○○即橫剖中腰之正方　半之為每角輳心之線之冪得○五○○○此線即分形自底角輳頂心之楞如心戊心巳心乙又為八等面形外切渾圓之半徑　又半之為分形每面自頂至邊斜垂線之冪即心庚得○二五○○此線即設邊之半其冪為設邊四之一

設半邊之冪取其三之二為分形中高線之冪即心辛得

○一六六六不盡又為八等面形內容渾圓之半徑

捷法取八等面設邊之冪六而一為八分體中高之冪開方得中高

假如設邊一百其冪一萬則分體中高之冪一千六百六十六不盡　求其根得四十○八二四八　以中高乘三角平面冪三除之得分體八因之得全積

又捷法八等面設邊之冪取三之二為體內容渾圓之徑冪開方得內容渾圓徑折半為八分體中高

假如設邊一百其冪一萬則內容渾圓之徑冪六千六百六十六不盡　求其根得八十一六四九六　折半為分體中高

或竟以內容渾圓全徑乘設面三角平冪四因三除之得全積

又捷法　此方斜之比例

八等面設邊之冪倍之為體外切圓徑冪開方得徑以乘設邊之冪即腰廣平方得數三歸見積

假如設邊一百其冪一萬其斜如弦弦之冪倍方冪得二萬求其根得一百四十一四二一三以乘腰廣一萬得一百四十一萬四千二百一十三三除之得總積四十七萬一千四百〇四

一系八等面體之邊上冪與其外切渾圓之徑上冪

其比例為一與二方斜比例

一系八等面體之邊上冪與其內容渾圓之徑上冪

其比例為三與二

一系　八等面體外切渾圓之徑上冪與其内容渾圓之徑上冪　其比例為三與一

准此而知八等面内容渾圓渾圓内又容八等面其渾圓外切之八等面邊或徑上冪與内容之八等面邊或徑上冪其比例亦必為三與一也

計開

八等面形諸數

設邊一百　其積四十七萬一四〇四　與歷書所差甚微

其體外切渾圓之徑一百四十一內外兩渾圓之徑冪為三與一其根約為四與七而強體內容渾圓之八十一

八等面外切立方徑一百四十一方斜比例也與外切渾圓同

八等面內容立方徑四十七

內外切大小立方之徑之比例為三與一

內外兩立方之積之比例為二十七與一

若渾圓內容立方立方內容八等面體八等面體內又容渾圓則大小兩渾圓之徑亦若三與一其積亦若二

十七與一

一率　四七一四〇四　例容

二率　一〇〇〇〇〇〇　例邊之立方

三率　一〇〇〇〇〇〇　設積

四率　二一二一三二二　設邊之立積

開立方得根一百二十八為公積一百萬之八等面根

與凡例

規解合

設邊一百　所切十等邊平面之邊五十　其半甲乙二十五

一率　十八度正弦　○三○九○

二率　全數　一○○○○

三率　甲乙　二五

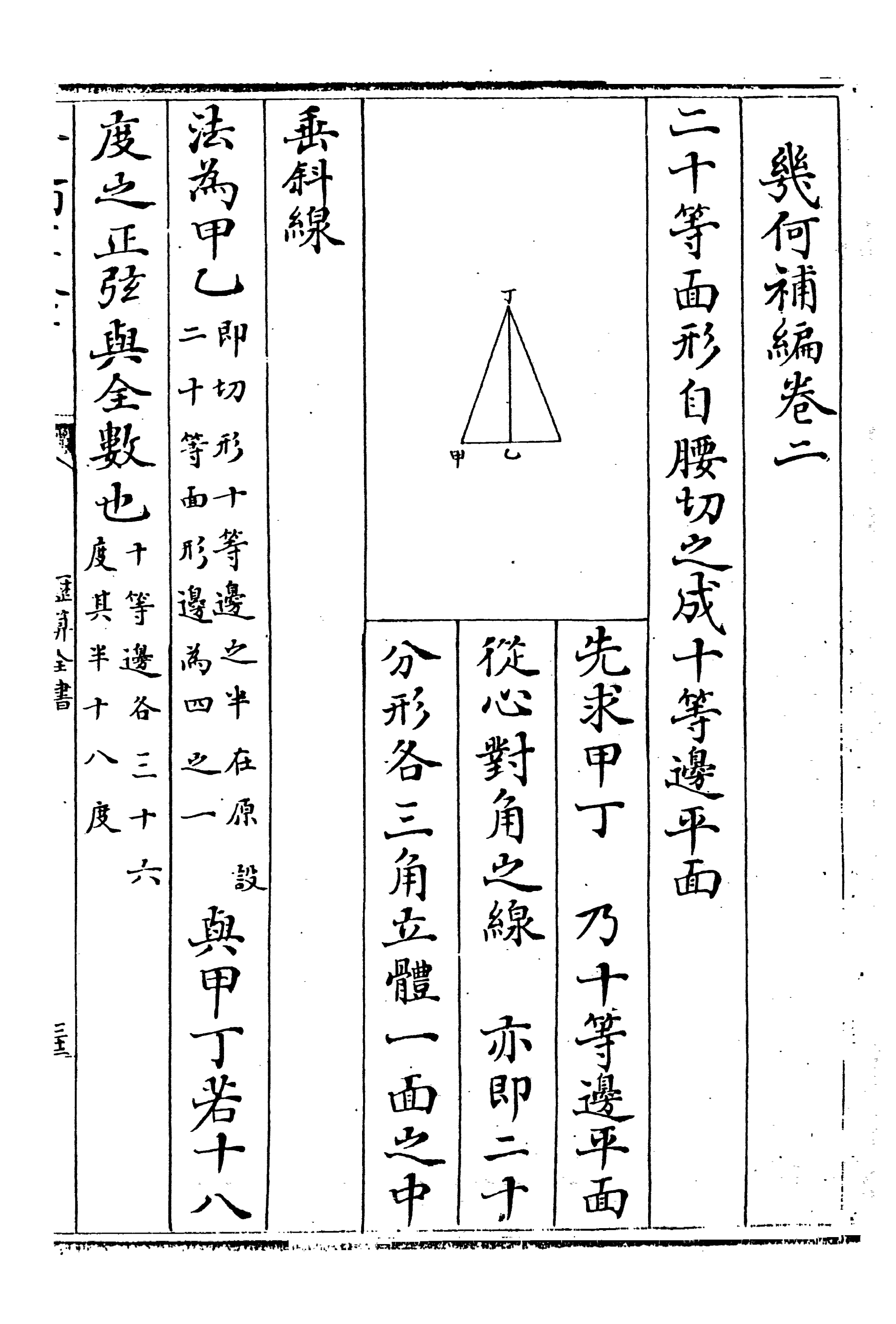
四率　甲丁　八○九○六一

用等邊三角求容圓法

設邊一百　其内容圓半徑二十八八六七五為心甲

幾何補編卷二

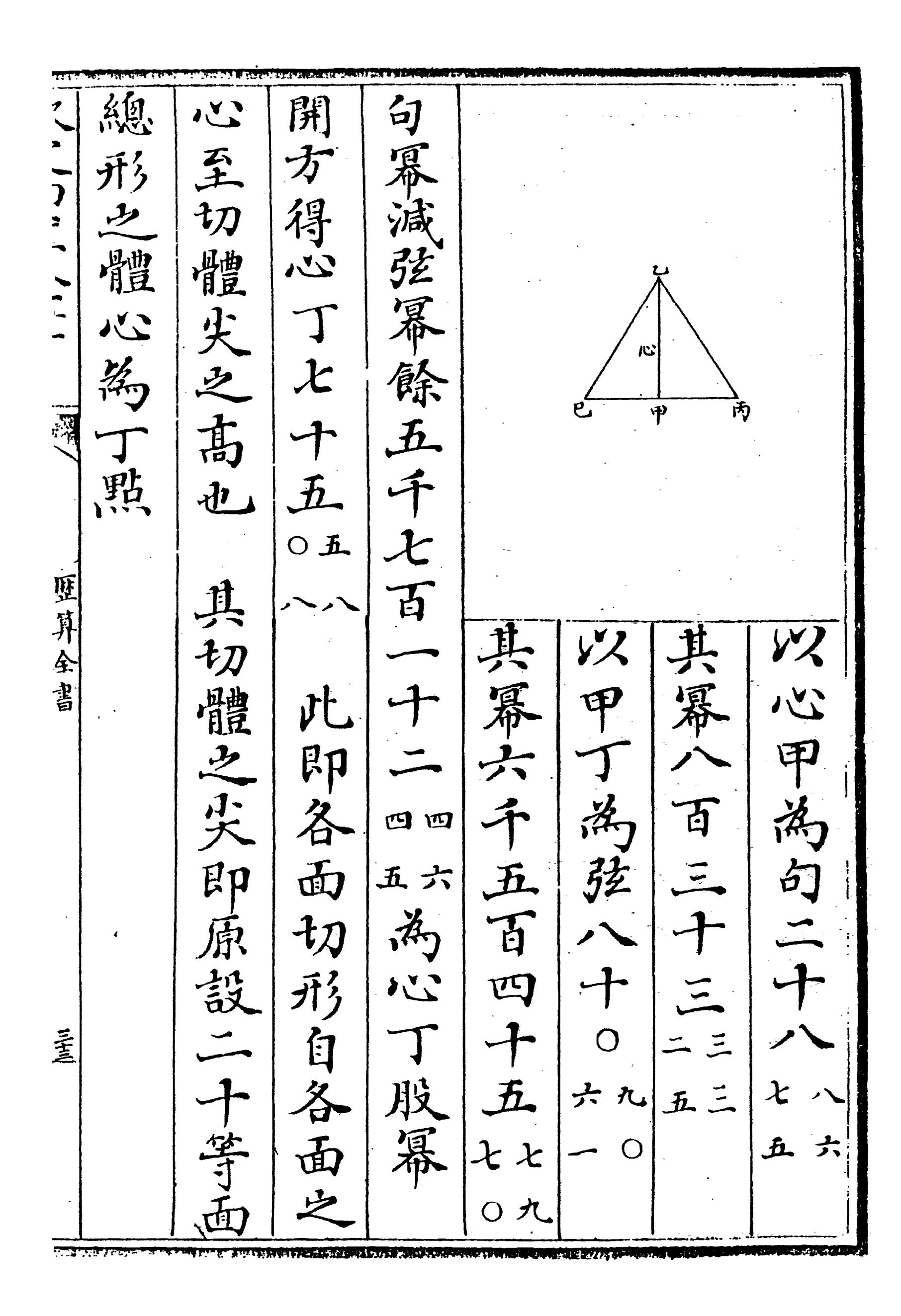
二十等面形自腰切之成十等邊平面



先求甲丁　乃十等邊平面從心對角之線　亦即二十分形各三角立體一面之中垂斜線

法為甲乙（即切形十等邊之半在原設二十等面形邊為四之一）與甲丁若十八度之正弦與全數也（十等邊各三十六度其半十八度）

用後法得乙巳丙平面冪積四千三百三十〇一二五〇又依三等邊角形設邊一百丙巳其半五十丙甲求到乙甲中長八十六六〇二五用其三之一即心甲二十八八六七五以與丙甲五十相乘得一千四百四十三三七五〇為各等面平積三之一三因之得平面冪又以丁心七十五五八〇八乘之得一十〇萬九千〇九十一四三七二為二十等面形分切每面至心之積又以二十乘之得全積



以心甲為句二十八八六七五

其冪八百三十三三三二五

以甲丁為弦八十〇九〇六一

其冪六千五百四十五七九〇七〇

句冪減弦冪餘五千七百一十二四六四五為心丁股冪

開方得心丁七十五五八〇八　此即各面切形自各面之

心至切體尖之高也　其切體之尖即原設二十等面

總形之體心為丁點

依上法求到二十等面全積

設邊一百　其積二百一十八萬一千八百二十八查此

例規解差不多惟測量全義差遠

按此法以本形分為二十各成三角立錐形而各以分形之高乘底取三之一以為分形積然後以等面二十為法乘而并之得總積可謂的確不易矣然與曆書中比例規解及測量全義俱不合何耶

計開

二十等面形

設邊一百　其每面中長線八十六六〇二五

其每面冪積四千三百三十〇一二五〇

其每面容平圓之心作線至形心之丁七十五五八〇八即心丁　心丁即內容渾圓之半徑

其分形各以每面之冪積為底心丁為高各得三角立錐積一十萬九千〇九十一四三七二

其立錐積凡二十合之得總積二百一十八萬一千八

百二十八

用上法求形內容渾圓

其心丁七十五〇五八即內容渾圓半徑以心丁線與各平面作垂線而

丁點即體心故倍之得一百五十一一六為內容渾圓全徑

置小渾圓徑一百五十一零自乘得二萬二千八百〇一以十一乘十四除得一萬七千九百一十五為圓冪

置內容渾圓之平圓冪一七九一五以圓徑一百五十一取三之二得一百强以乘平圓冪得一百八十〇萬

二千二百四十九爲二十等面内容渾圓之積

置内容圓徑一百五十一自乘得二萬二千八百〇一再乘三百四十四萬二千九百五十一以立員捷法〇五二三五九八七七乘之得渾圓積一百八十〇萬二千七百二十五

先用密率十四除十一乘得渾圓一百八十萬二千二百四十九以較立圓捷法所得少尾數四百七十六約爲一萬八千之五弱不足爲差也

依立圓法以圓率三一四一五九二乘立圓法六而一

二十等面

一率　二一八一八二八　　例容

二率　一〇〇〇〇〇〇　　例根一百之體積

三率　一〇〇〇〇〇〇　　設容

四率　〇四五八三三二　　所求根立積

如法算得二十等面之容一百萬其根七十七

此例規解作七十六尚差不多測量全義云二十等

邊設一百其容五二三八〇九則大相懸絶矣久知

得五十二萬三五九八為徑一百之渾圓積

依法求得立方邊五十七七三五〇立方積一十九萬二四五〇四等面積六萬四千一百五十〇並合前算

小渾積一〇〇七六六　若用捷法以渾圓率五二三五九八乘立方積得數後去末六位亦得一十〇萬〇七六六

内容渾圓尚且如此之大況二十等面之形又大於内圓乎然則歷書之率其非確數明矣

丁為體心亦即切十等邊平面之中心

甲乙丙丁即横切十等邊平面之分形　心為二十等面每面之正中　心丁為體周各平面至體心之垂線亦即分體之中高亦即體内容渾圓之半徑　丁亥丁子丁戌皆分體之楞線乃自各分面角輳體心之稜也亦即為外切渾圓之半徑　丁甲丁丙皆横切平面各角輳心之線亦即分體各斜面之中垂斜線也

求法以丁甲為股亥甲為句即根之半兩冪相并開方得弦

其誤今乃得其確算已未年所定之率以兩書酌而為之究竟不是今乃得之可見學問必欲求根也

二十等面分體之圖

亥子戌為二十等面之一面亦即各分體之底

亥子子戌戌亥皆其邊即根也半之為亥甲

甲乙丙為橫邊切處即橫切成十等邊形之一邊

計開二十等面體諸數

設邊一百　其容二百一十八萬一千八百二十八

其内容渾圓徑一百五十一　其外切渾圓一百九十

其每面中心至體心七十五半即内容渾圓之半徑

其每面各角至體心九十五即外切渾圓之半徑

計開二十等面體諸用數

設邊一百　外切立方之半徑八十〇九〇一七為體心至

邊之半徑即寅中卯中辰中等

即丁亥也丁子丁戊同

求二十等面外切渾圓之半徑

依句股法　以丁甲股八十〇九〇六一自乘冪六千五百四十五七九七〇　亥甲句五十〇自乘冪二千五百　相并為亥丁弦冪九千〇四十五七九七〇　平方開之得亥丁九十五一〇五二為外切渾圓半徑　亦即二十分形自其各角輳心之稜　倍之得一百九十〇二一〇四即外切渾圓全徑

內容十二等面之邊五十三九三四四

每面之冪四千三百三十〇一二五〇

二十等面之冪共八萬六千六百〇二半

分體積一十〇萬九千〇八十四六五為二十等面體積

二十之一

合之得全積二百一十八萬一千六百九十三

內容小立方之邊八十七二六七七以內容立圓徑自乘之冪取三之一開方得之

倍之為邊至邊一百六十一_{三四}八〇即外切立方全徑

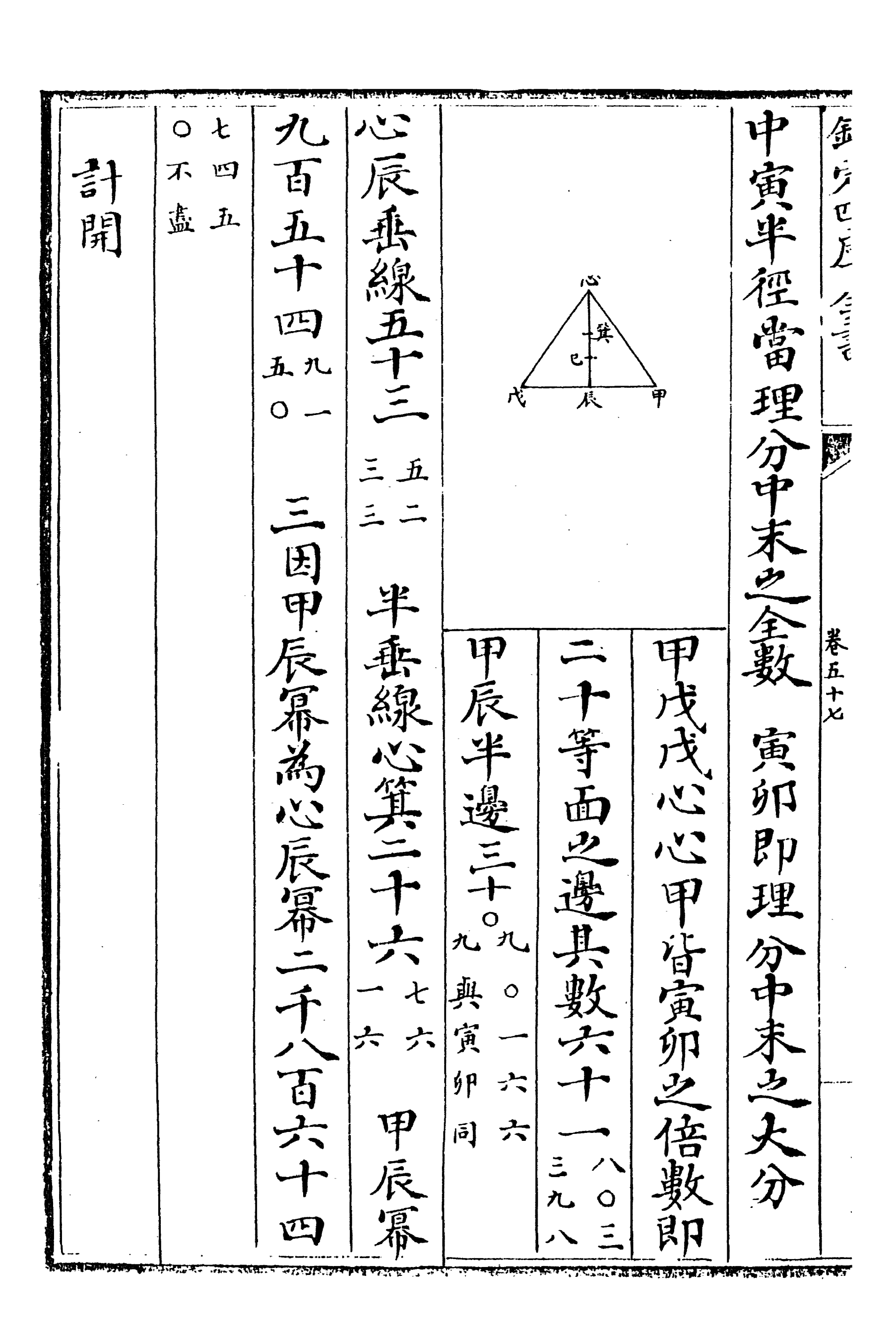
外切渾圓之半徑九十五_{五六}一〇為體心至各角尖之半徑（即甲中戊中心中等）

倍之為角尖至角尖一百九十〇_{一二}二一即外切渾圓全徑

內容渾圓及內容十二等面之半徑七十五_{六一}五七為體心至各面之半徑（即巳中庚中等）

倍之為內容渾圓全徑一百五十一_{二二}一五為面至面

中寅半徑當理分中末之全數　寅卯即理分中末之大分



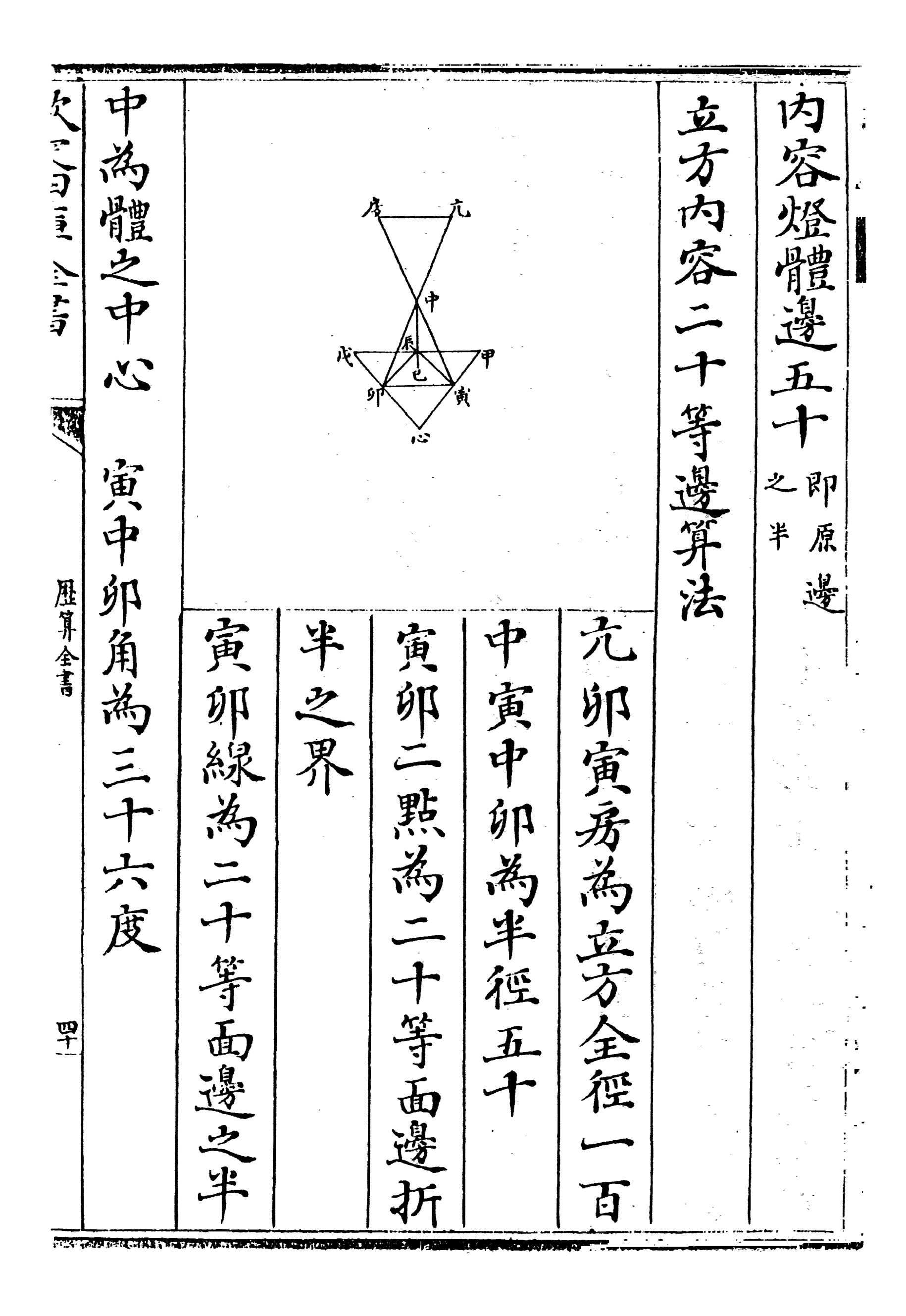
甲戊戊心心甲皆寅卯之倍數即二十等面之邊其數六十一八〇三三九八甲辰半邊三十〇九〇一六六九與寅卯同

心辰垂線五十三五二三三　半垂線心箕二十六七六一六　甲辰冪九百五十四九一五〇　三因甲辰冪為心辰冪二千八百六十四七四五〇不盡

計開

內容燈體邊五十即原邊之半

立方內容二十等邊算法



亢卯寅房為立方全徑一百

中寅中卯為半徑五十

寅卯二點為二十等面邊折半之界

寅卯線為二十等面邊之半

中為體之中心

寅中卯角為三十六度

面之中垂線五十三五二三三即心辰

中垂線之半二十六七六一六即心箕

面之冪一千六百五十三九五七八甲戊心面

中垂線三之一得一十七八四一一一即心巳

內容立圓半徑四十六七〇八六即巳中　全徑九十三四一七二

二十等面全積五十一萬五千〇二十六九五九七

約法

立方根與所容二十等面之邊若全數與理分中末之

立方徑設一百　半徑五十

理分中末線大分六十一八〇三三九八即二十等面之邊

論曰以中寅半徑五十求寅卯正得理分中末大分之半而甲戊邊原倍於寅卯寅房全徑亦倍於寅中是全數與大分皆倍也故徑以全數當寅房全徑以理分中末之大分當甲戊等二十等邊之全邊也

又立方邊設一百即寅房徑　半之五十即中寅

內容二十等面之邊六十一八〇三三九八即甲戊等

三率　二十等面邊一百〇〇

四率　外切立方一百六十一八〇三四

依法求得二十等面邊一百其外切立方一百六十一八〇三四與先所細算合

半圓內容正方

法以圓徑為三率丙丁　理分中末之小分為二率庚辛

理分中末全線加小分為首率丁辛為全線再加庚辛為小分共得丁庚總線也

二三相乘一率除之得四率丙乙即甲丁為全徑之小

大分　面冪三之一以乘容圓全徑得數十之為全積

中垂線三之一心巳為句即平面容員半徑自乘得句冪三百一十八三〇四八四九以減中寅弦冪二千五百〇〇餘巳中股冪二千一百八十一六九五一五一開方得巳中根四十六七〇八六

二十等面邊設一百用理分中末線求其外切之立方

一率　二十等面邊六十一八〇三三九八

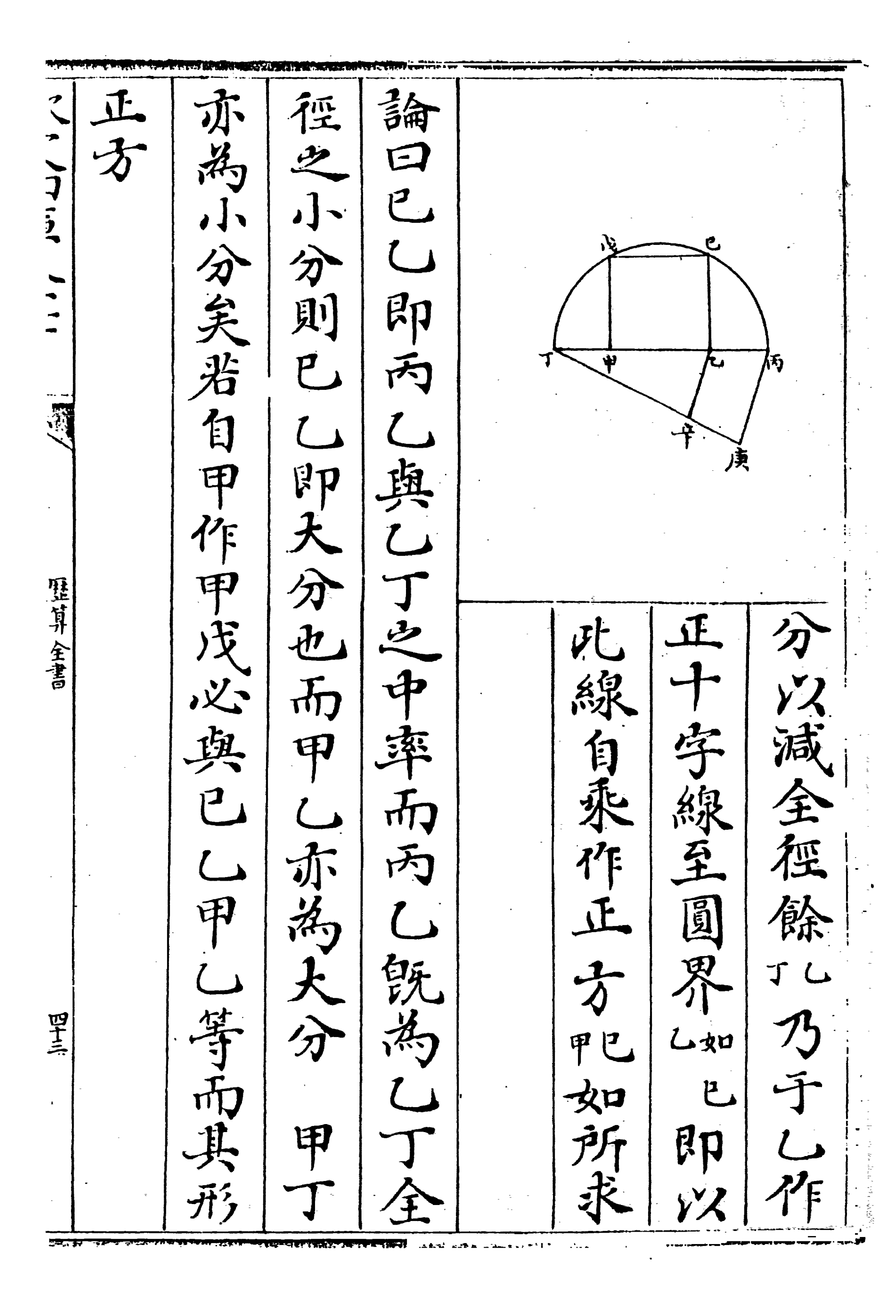
二率　外切立方一百〇〇

半渾圓內容立方

法以乙甲圓徑自乘之冪取其六之一開方得容方根（丙丁方丙戊邊）

論曰試倍甲丙乙庚半渾圓為全渾圓體亦倍丙丁正方形作丙已長立方形亦必能容矣然則丙已線在長立方形之内為斜線者亦即渾圓之徑也（與甲乙徑等）

試於長立方面作戊已斜弦



分以減全徑餘乙丁乃于乙作正十字線至圓界如己乙即以此線自乘作正方如己甲所求

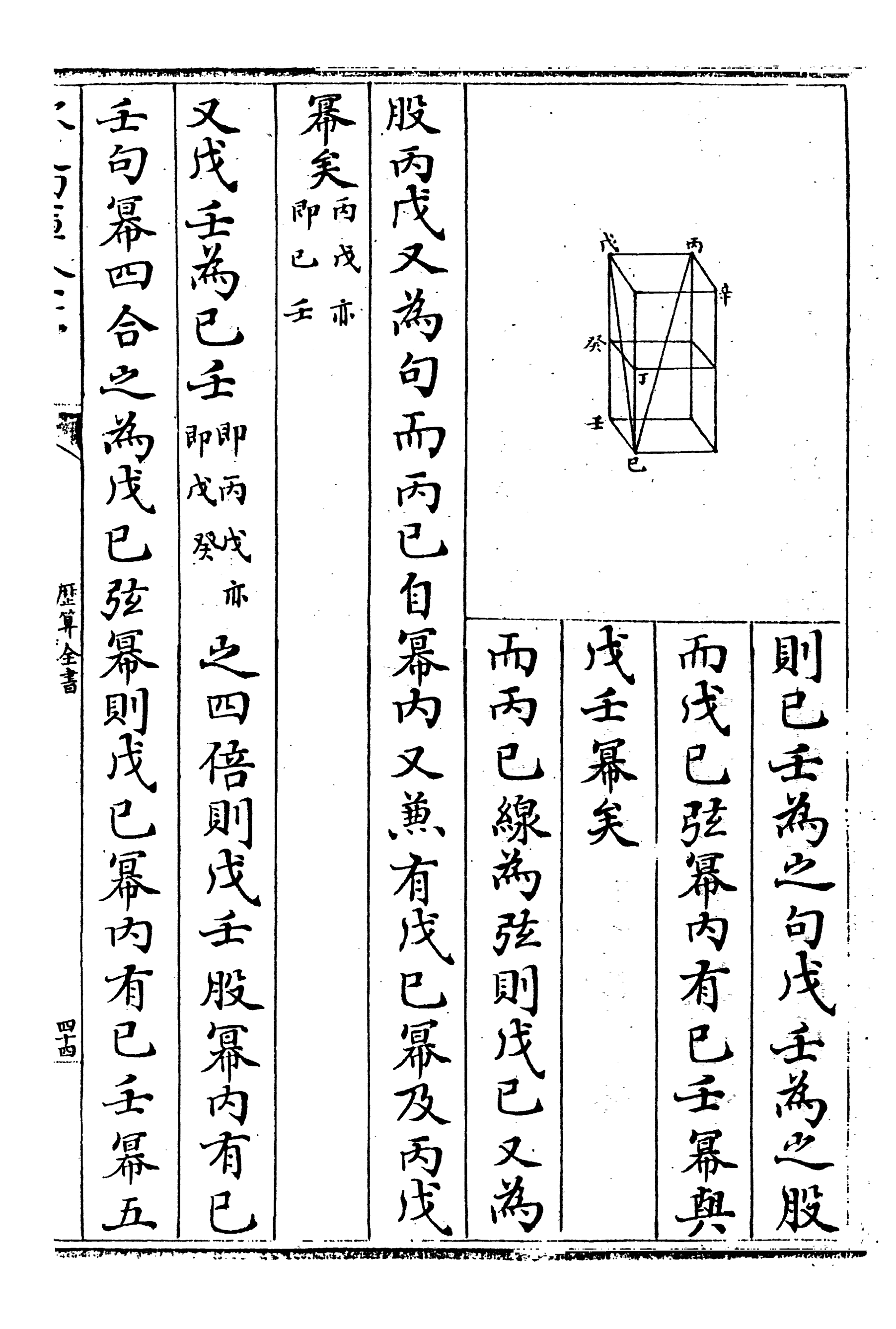
論曰己乙即丙乙與乙丁之中率而丙乙既為乙丁全徑之小分則己乙即大分也而甲乙亦為大分甲丁亦為小分矣若自甲作甲戊必與己乙甲乙等而其形正方

矣

而丙巳弦冪内復兼有戊巳股冪及丙戊句冪是丙巳冪内有丙戊冪六也丙巳既同圓徑則取其冪六之一開方必丙戊容方邊矣

立方内容十二等面其内又容立方此相容比例

立圓内容十二等面其内又容立方此立方之面冪為外圓徑上面冪三之一而立方



則已壬為之句戊壬為之股而戊已弦冪內有已壬冪與戊壬冪矣而丙已線為弦則戊已又為股丙戊又為句而丙已自冪內又兼有戊已冪及丙戊冪矣（丙戊亦即已壬）又戊壬為已壬（即丙戊亦即戊癸）之四倍則戊壬股冪內有已壬句冪四合之為戊已弦冪則戊已冪內有已壬冪五

小立方外切渾圓徑冪

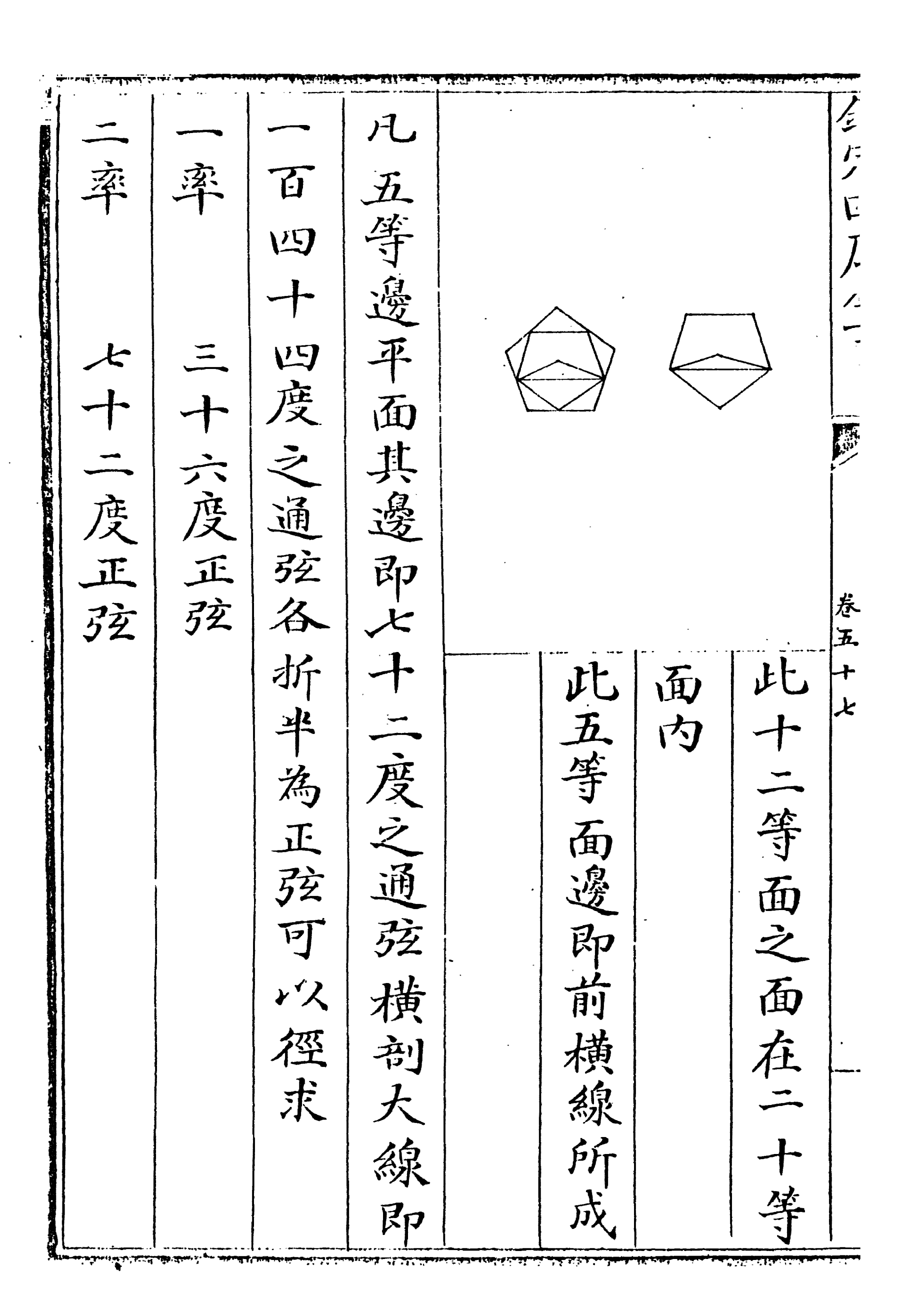
凡立方內容二十等面二十等面內又容渾圓圓內又容小立方此小立方之各角能同渾圓之切點以切於二十等面之平面心

法以內容渾圓徑之冪取三之一為內小立方之冪平方開之得切點相距即小立方根以根乘冪見積

之各角即同十二等面角以切於立圓之面
法以外切渾圓徑上冪取三之一為十二等面內小立
方冪平方開之得小立方根根乘冪見積
又簡法以十二等面之面冪求其橫剖之大線此線即
十二等面內容小方之邊
如圖作甲乙線剖一面為二
此線在面中最大即為內小
立方根以此自乘而三之即

此十二等面之面在二十等面内

此五等面邊即前横線所成



凡五等邊平面其邊即七十二度之通弦横剖大線即一百四十四度之通弦各折半為正弦可以徑求

一率　三十六度正弦

二率　七十二度正弦

簡法取内容渾圓之内小立方邊求其理分中末之大分為内容十二等面邊

又簡法如前求得二十等面内容十二等面之一面乃求其横剖之大線即二十等面内容小立方之根　以根自乘而三之即二十等面内容渾圓之徑冪　開方得根即内容渾圓徑　折半為分體之中高

一横剖

此二十等面之面作三分之

甲心乙　乙心丙　丙心丁
丁心戊　戊心甲　皆二十
等面之一面其各三邊皆等
各以庚辛壬癸己為其面之
心若内容十二等面體則十二等面之各尖必切於庚
辛壬癸己等心點
今求内容十二等面之邊則必以庚辛等心點聯為直
線即戊五等邊面之邊而與十二等面之形相似而可

三率　五等邊之一邊

四率　横剖之大線

凡十二等面體與二十等面體可互相容而不窮

十二等面體有二十尖二十等面體有十二尖其各尖之相距必均其互相容也皆能以其在内之尖切在外各面之中心而徧

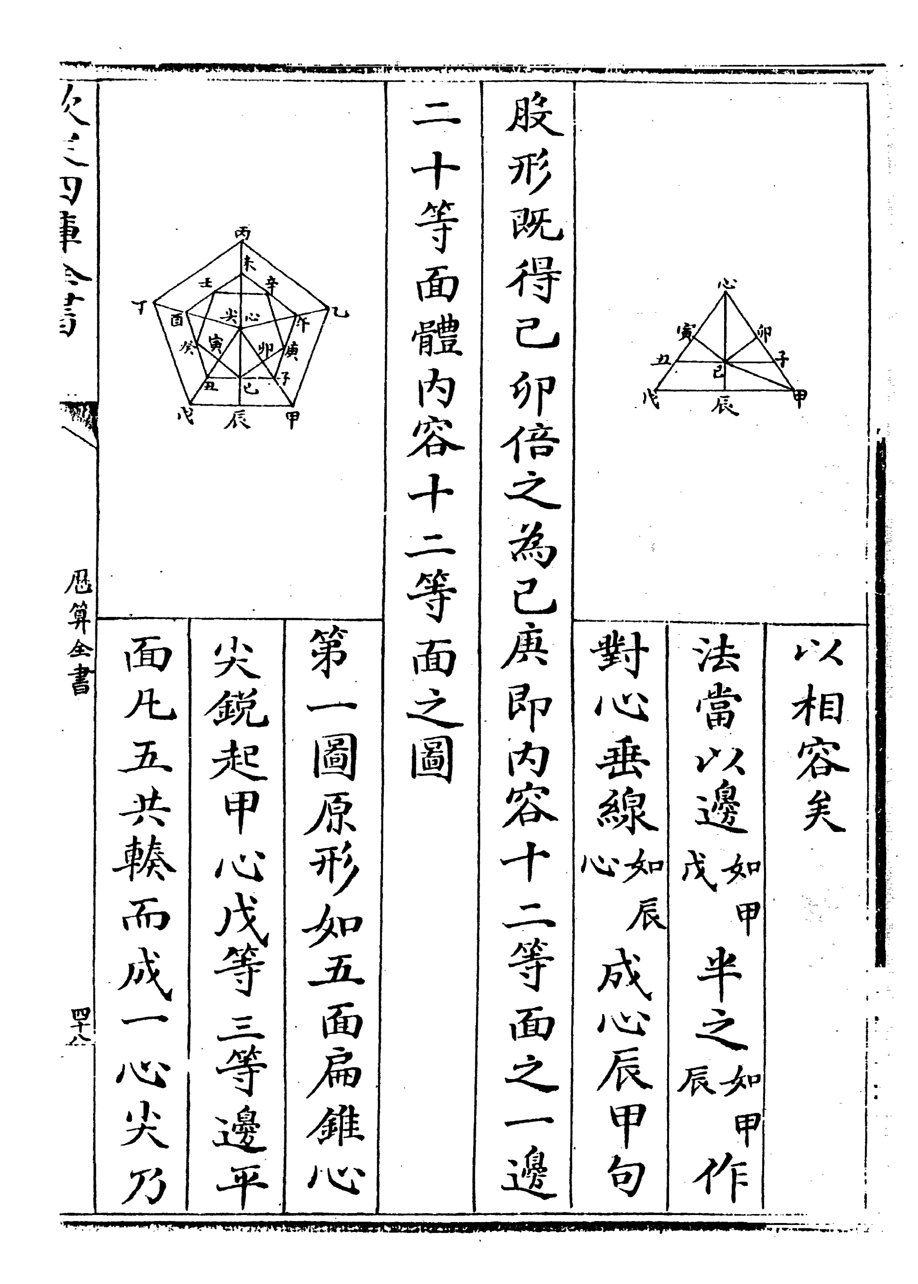
凡二十等面内容立圓仍可以容二十等面

二十等面内容立圓仍可以容十二等面

二十等面四之一

其已庚辛壬癸五點皆三等邊平面之中心亦即內容十二等面之稜尖所切故必先求此點

簡法曰以甲戊邊半之於辰作辰心對角斜垂線又以心甲心戊各取三分之二為心子心丑乃聯子丑為線與甲戊邊平行與辰心垂線十字交於已點則已點即甲心戊平面之心再從子至午作與邊平行線線之半即庚點餘三面盡如此作平行線則辛點在午未線壬點



以相容矣

法當以邊(如甲戊)半之(如甲辰)作對心垂線(如辰心)成心辰甲句股形既得己卯倍之為己庚即內容十二等面之一邊

二十等面體內容十二等面之圖

第一圖原形如五面扁錐心尖銳起甲心戊等三等邊平面凡五共輳而成一心尖乃

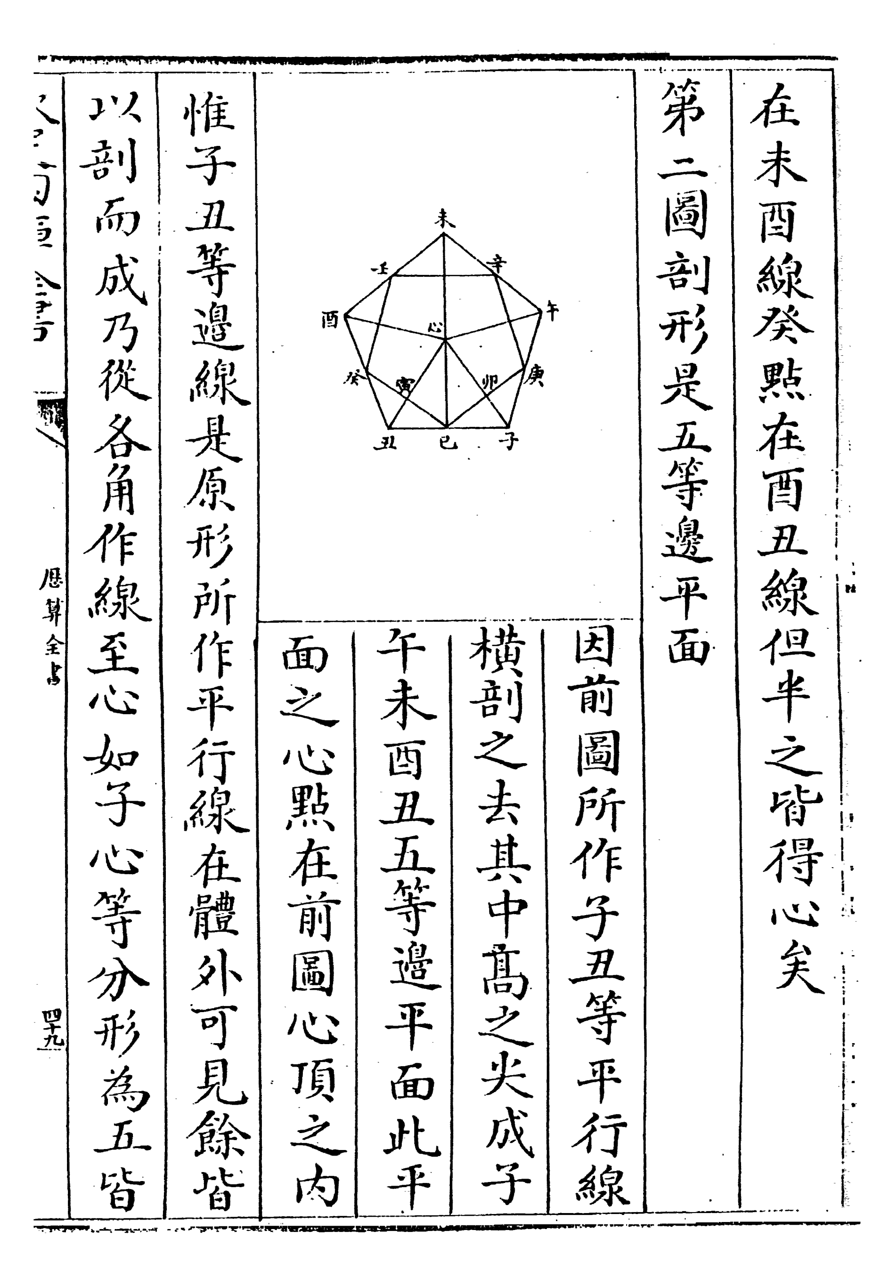
平面三角形而心子等線皆小於子丑邊因子巳原邊及子心丑角求得心巳垂線及子心對角線

第三圖正用之形即内容十二等面之一面

因前第二圖各平分其邊得巳庚辛壬癸五點即原形之平面心又聯此點作巳庚等直線則成此形以此形為内容十二等面之一面則巳庚等五點為十二等面之鋭角而皆切二十等面之平

在未酉線癸點在酉丑線但半之皆得心矣

第二圖剖形是五等邊平面



因前圖所作子丑等平行線横剖之去其中高之尖成子午未酉丑五等邊平面此平面之心點在前圖心頂之内

惟子丑等邉線是原形所作平行線在體外可見餘皆以剖而成乃從各角作線至心如子心等分形為五皆

以上用第一圖乃斜立面也

第二圖

子巳半邊三十三三三　子心對角線五十六七〇九九

巳心垂線四十五八七九二

法為全數與五十四度之割線一七〇一三〇若子巳邊與子心也子巳乘割線以全數十萬而一得子心

又全數與五十四之切線一三七六三八若子巳邊與巳心也子巳乘切線以全數十萬而一得巳心　凡全數除降

面心矣

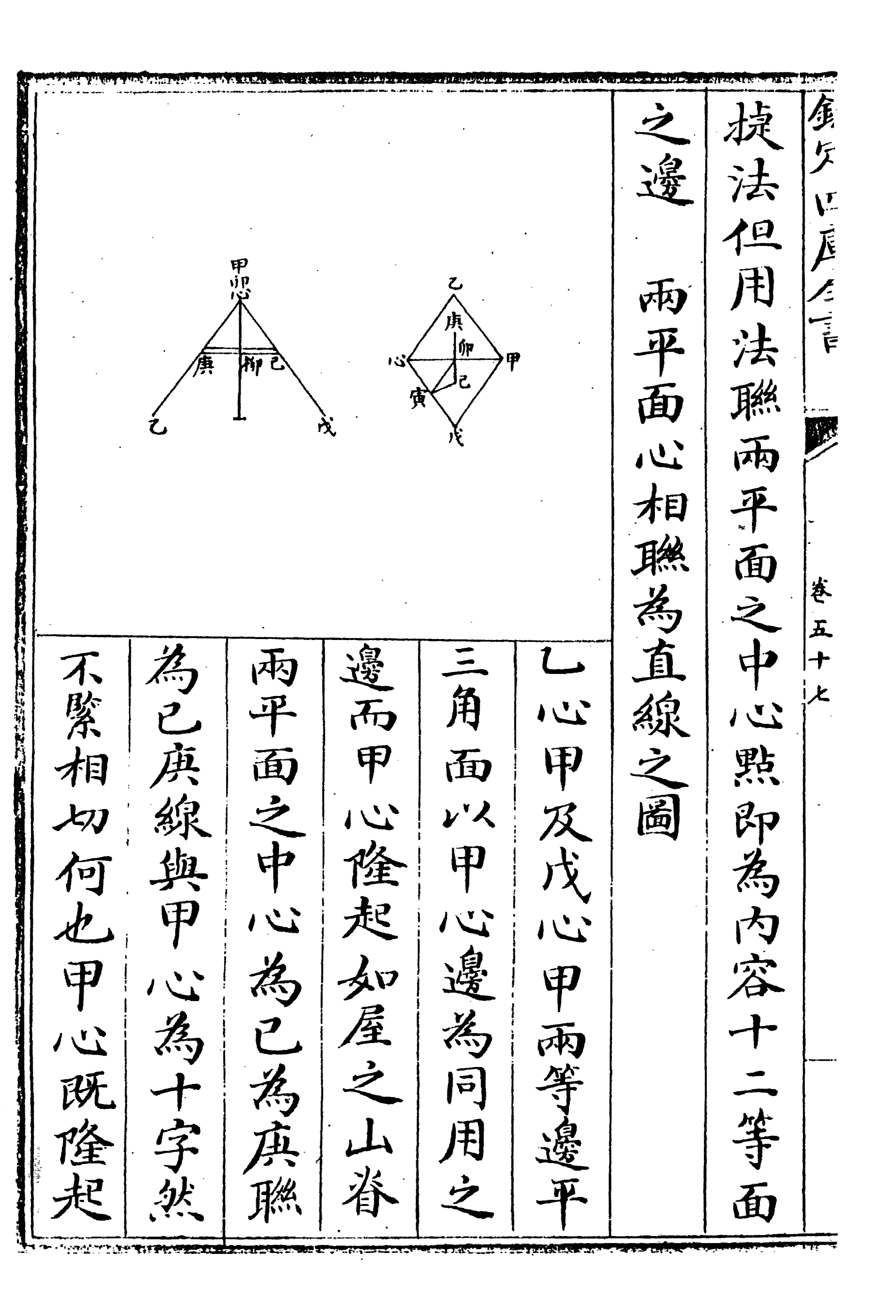
求己庚線法因心子對角線及心己垂線子己原半邊得己卯倍之為己庚

第一圖

設二十等面邊一百　甲戊等五邊甲心等五輳頂線並同　則子心六十六（六六）子丑平行線同　皆為原邊三之二　心己斜垂線五十七（七三五〇）為心辰斜垂線三之二

捷法但用法聯兩平面之中心點即為內容十二等面之邊

兩平面心相聯為直線之圖



乙心甲及戊心甲兩等邊平三角面以甲心邊為同用之邊而甲心隆起如屋之山脊兩平面之中心為己為庚聯為己庚線與甲心為十字然不緊相切何也甲心既隆起

五位

第三圖　仍從第二圖生

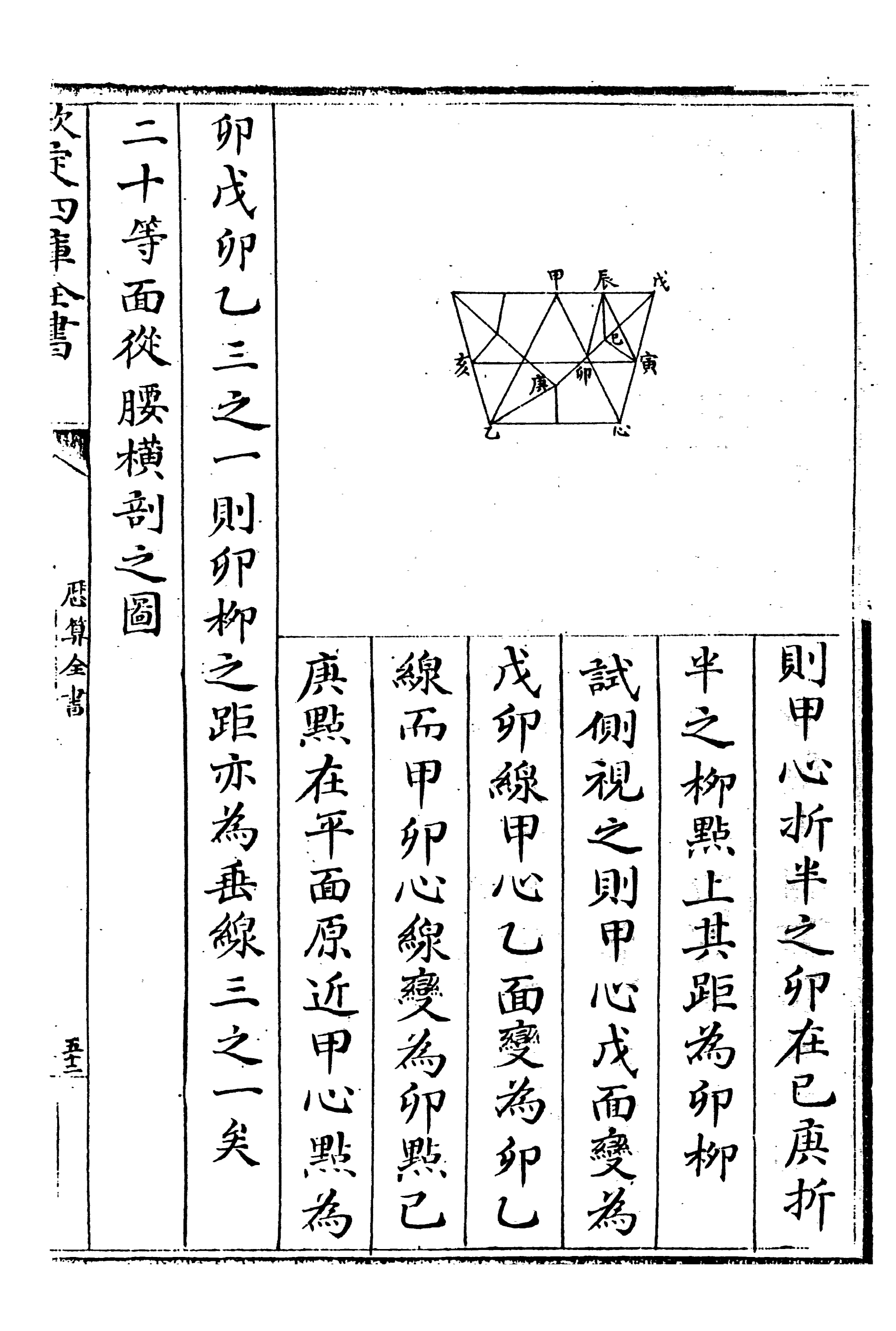
己庚等兩平面心相距線五十三五八一六　其半己卯二十六七九〇八

法為子心對角線與己子半邊若己垂線與己卯也

倍己卯得己庚

求得二十等面邊一百　内容十二等面其邊五十三五八一六

凡二十等面體其面之邊皆等而皆斜交故邊皆高於面面之中心如己如庚是距體心最近之處故為內容渾圓及十二等面所切之點也邊之兩端又高於其折半之處邊所輳為尖如甲如戊如乙如心等是距體心最遠之處故為外切渾圓及外切十二等面之尖也　其各邊折半之點如寅如卯其



則甲心折半之卯在巳庚折半之柳點上其距為卯柳試側視之則甲心戊面變為戊卯線甲心乙面變為卯乙線而甲卯心線變為卯點巳庚點在平面原近甲心點為卯戊卯乙三之一則卯柳之距亦為垂線三之一矣

二十等面從腰橫剖之圖

乙心等尖亦高則其所對之甲戊等邊又平一高一平彼此相制而成相等之距故寅卯等折半之處其距體心皆等聯之為線即成相等之線而皆平行也

然則何以知其為十等邊平面曰准右圖上下各五面其腰圍亦上下各五面而尖牙相錯成十面今各從其半邊剖之則必為十邊平面無疑也

如圖夆卯寅十等邊平面以中為心

中寅中卯皆原體心與其邊

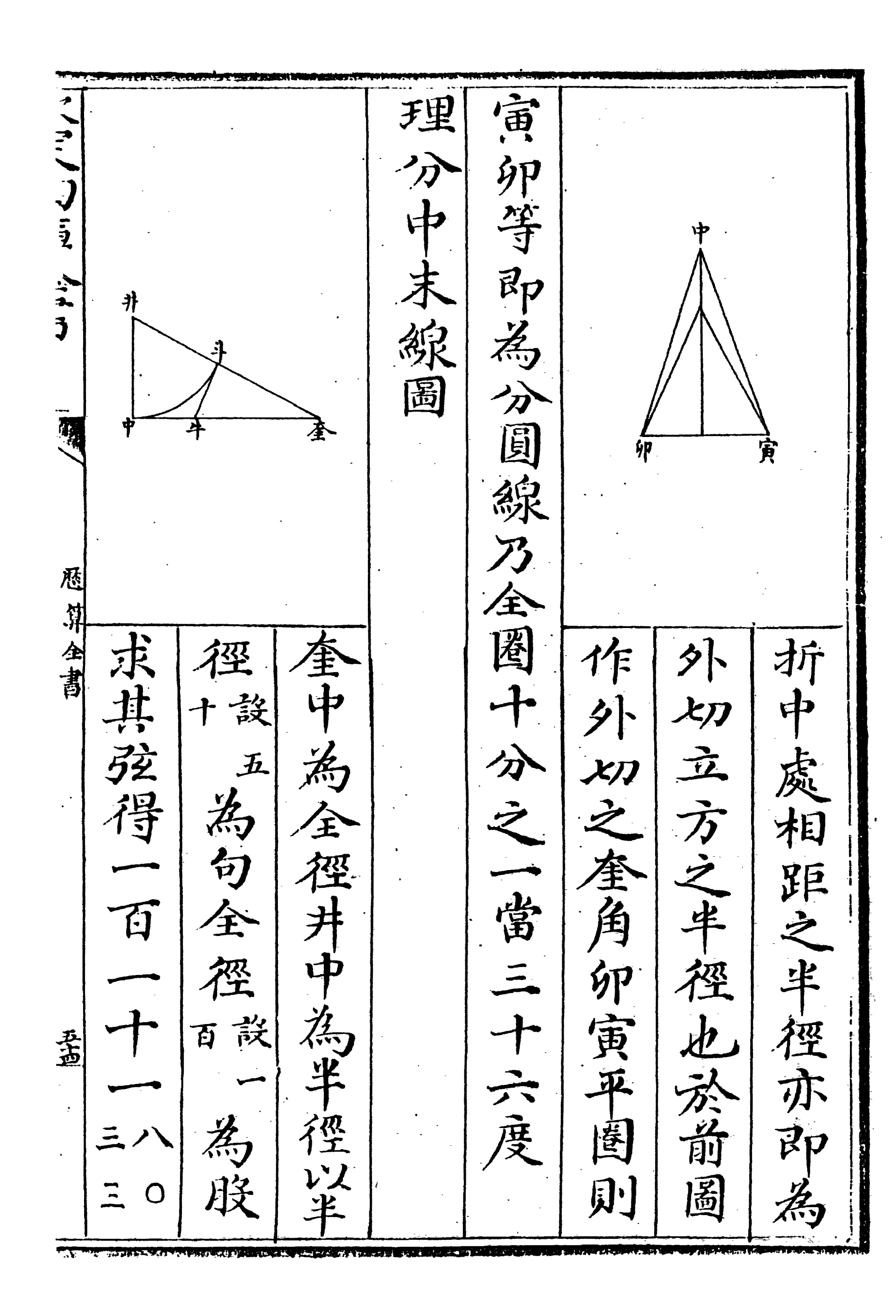
距體心在近遠酌中為外切立方之半徑其內切之已庚外切之甲戊乙心等賴寅卯距心之線為用然後可知故其用最要

橫剖所成之面十二等面從腰橫剖其根亦同

問各邊既高於面而又斜交何以能橫切成平面乎曰從右圖觀之甲戊尖最高則其所對之乙心等邊似平矣而

九八為井奎　以井為心中為界作圓分如中斗截井奎線於斗則井斗亦半徑也　以井斗減井奎其餘斗奎即為理分中末線之大分（亦即奎牛）以奎牛為度作點于倍徑之圈周而徧即成十平分圈周之點聯其點為線即成寅卯等十等邊故十等邊之寅卯等即木圈半徑之理分中末大分也　若奎中為半徑則井中為半半徑亦同

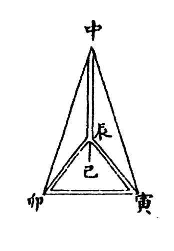
奎中全數（半徑）設一百　寅卯必六十一（八〇三三九八）即半徑

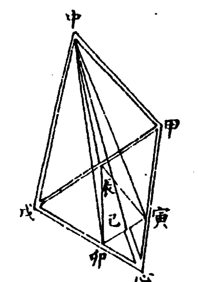


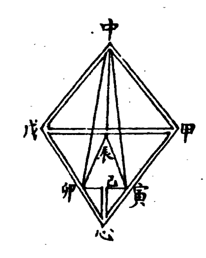
折中處相距之半徑亦即為外切立方之半徑也於前圖作外切之奎角卯寅平圜則寅卯等即為分圓線乃全圈十分之一當三十六度

理分中末線圖

奎中為全徑井中為半徑以半徑設五十為句全徑設一百為股求其弦得一百一十一八〇三三







甲戊心為二十等面之一面其三邊等中為體心

甲中戊中心中皆各面之鋭角距體心之線又為體外切渾圓及外切十二等面之半徑

以甲戊心面為底依甲中戊中心中三線剖至體心中成

理分中末之大分奎牛即奎斗

理分中末線　法以全數一萬之冪一萬為股冪其半五十之冪二千五百為句冪并得一萬二千五百為弦冪開方求其根得一百一十一八〇三三九八以半數五十減之得六十一八〇三三九八為理分中末之大分即三十六度之分圓線也

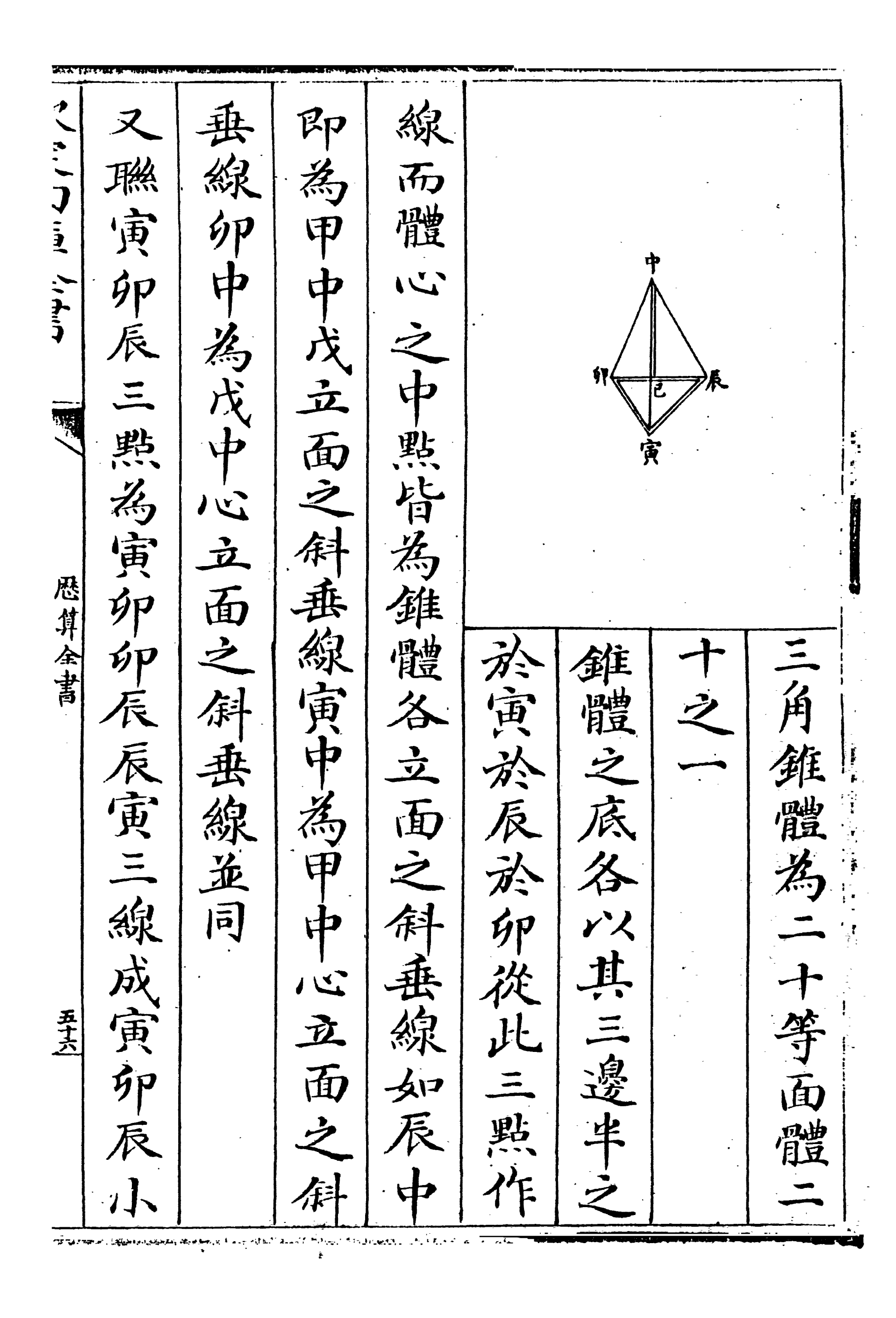
半之為十八度之正弦三〇九〇一六九九八線表作三〇九〇二

二十等面分體之圖

等邊平三角面以此為底依寅中卯中辰中三斜垂線剖至體心之中㸃成小三角錐體其積為大三角錐四之一其寅卯等邊為原邊二之一 原設邊一百則寅卯五十

其巳㸃為三角面之中心大小並同 巳中即分體之中高大小錐體同 是即内容渾圓之半徑亦即内容十二等面體各尖距其體中心之半徑

其辰中卯寅中卯卯中辰皆立三角面皆為横剖成十等



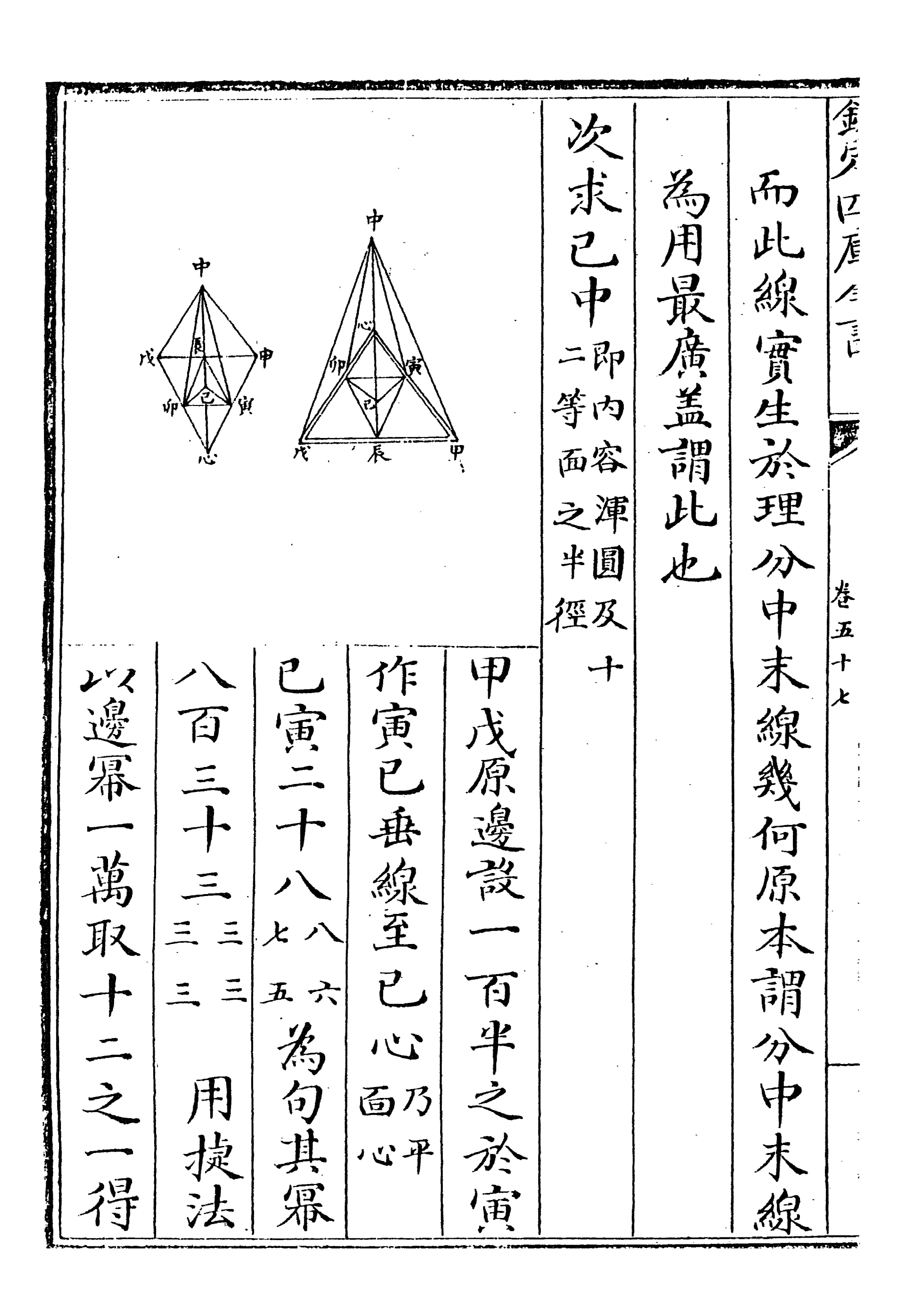
三角錐體為二十等面體二十之一

錐體之底各以其三邊半之於寅於辰於卯從此三點作線而體心之中點皆為錐體各立面之斜垂線如辰中即為甲中戊立面之斜垂線寅中為甲中心立面之斜垂線卯中為戊中心立面之斜垂線並同

又聯寅卯辰三點為寅卯卯辰辰寅三線成寅卯辰小

而此線實生於理分中末線幾何原本謂分中末線為用最廣蓋謂此也

次求己中即內容渾圓及十二等面之半徑



甲戊原邊設一百半之於寅作寅己垂線至己心乃平面心己寅二十八八六七五為句其冪八百三十三三三三三用捷法以邊冪一萬取十二之一得

邊平面之分形故寅卯與寅中之比例若理分中末線之大分與其全數也

今求寅中線即外切立方半徑卯中亦同

一率　理分中末之大分　六十一八〇三三九八

二率　全數　一百

三率　寅卯剖形十等邊之一即原邊之半　五十

四率　寅中　八十〇九〇一七

按寅中線為量體之主線既得此線即可以知餘線

二率　全數　一百

三率　寅卯剖形十等邊之一即原邊之半　五十

四率　寅中即外切立方之半徑　八十〇九〇一七

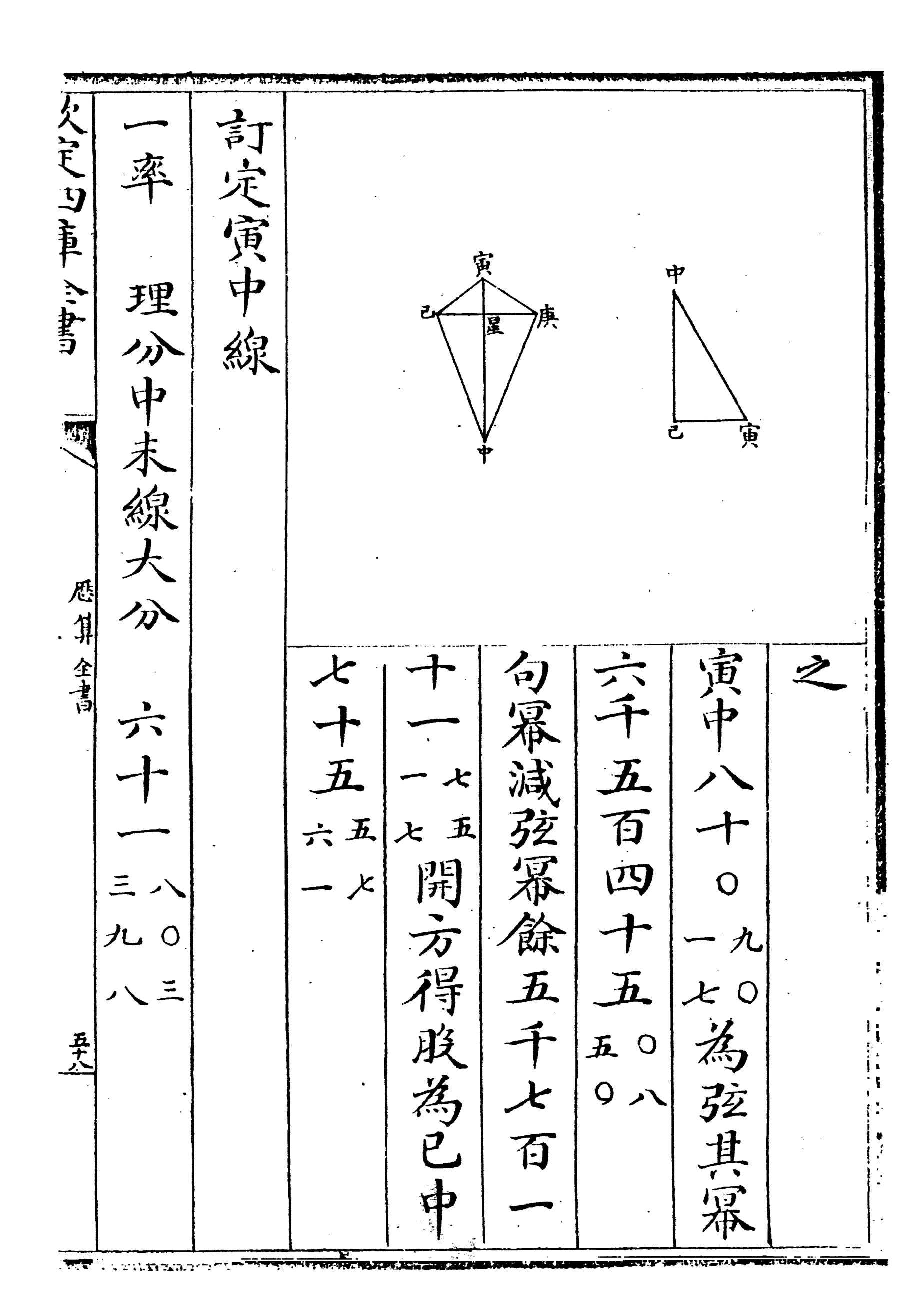
訂定己中線

甲戊邊原設一百半之於寅作寅己線

己寅句二十八八六七五　冪八百三十三三三三三

寅中弦八十〇九〇一七　冪六千五百四十五〇八五〇

己中股冪五千七百一十一七五一七　根七十五五七六一



之

寅中八十〇九〇一七為弦其冪六千五百四十五〇八五〇句冪減弦冪餘五千七百一十一七五一七開方得股為已中七十五五七六一

訂定寅中線

一率　理分中末線大分　六十一八〇三三九八

己庚等線相聯成五等邊平面圖

丙 辛 乙 庚 甲 己 戊 癸 丁 壬 心 頂

准前論甲心戊等三角平面合二十面為二十等面體則甲心等邊線皆高於平面而邊線之端五相輳即為尖角如心點依此推知甲乙丙丁戊點皆必與他線五相輳而成尖角矣

其己庚辛壬癸各點為各平面之最中央在體為最平

末求己庚線兩平面心相聯即內容十二等面之邊

一率　寅中八十〇九〇一七　為大弦

二率　己中七十五五七六一　為大股

三率　寅己二十八八六七五　為小弦

四率　己星二十六九六七二　為小股

倍己星得五十三九三四四為己庚

解曰中寅己大句股形與己寅星小句股形同用寅角則其比例等而為相似之形故也

面即皆有中央之點相聯而成五等邊平面亦十有二如此而內容十二等平面體已成故曰但聯已庚二點為線即內容十二等面之邊也

求甲中線即外切渾圓及十二等面之半徑心中戊中並同

寅甲為原邊之半設五十其冪二千五百為句冪

寅中為外切立方半徑八十〇九〇一七其冪六千五百四十

之處故內容之渾圓及內容之十二等面各尖必切此
點
今依前法求得巳庚等點相聯為直線則凡五平面相
輳為尖必有各中央之點相聯為線而皆成五等邊平
面形矣此平面形正與心尖相應　依此推知甲乙丙丁戊各點皆
能為尖則其周圍相輳之五平面亦必各以其中央之
點相聯為線而皆成五等邊平面形　二十等面體以
五邊線相輳之尖凡十有二每一尖之周圍皆有五平

三除之得分體積一十○萬九千○八十四六五○○以二十乘之得全積二百一十八萬一千六百九十三

十二等面分體之圖

戊辛庚己壬五等邊形即十二等面立體之一面 亦即分體形之底乃五面立錐形之底丙為平面心

丙丁為平面心至體心之垂線亦即分體形之中高又為體內切渾圓之半徑亦即為內切二十等面之半徑丁為全體之中心又為十二分體之上銳即五等面立

五〇八五〇為股冪并句股冪九千〇四十五〇八五〇八平方開

之得甲中弦

依法求得甲中九十五一〇六五

求體積

設邊一百其半五十　斜垂線八十六六〇二五　相乘得

面冪四千三百三十〇一二五〇

又以已中高七十五五七六一乘面冪得柱積三十二萬七

千二百五十三九六〇〇

面形故丁癸丁甲皆分體形自頂銳至各邊之斜垂線在所切之十等邊平面形即為自丁心至平面角之線甲癸等點在各邊為折中在切形之平面則對角又自丁至體周各角之線如丁辛丁庚丁戊等在分體即為自底角至頂銳之稜又為外切渾圓之半徑又為外切二十等面之半徑

先算十二等面之面即戊辛庚己壬法為全數與五十四度之切線若甲辛與甲丙也以

錐形之頂

戊辛壬庚等皆各面之外周線（即邊也）為體之稜亦名之為根

自分面之心丙作垂線至邊（如癸丙甲丙）分各邊為兩其分處為癸為甲（即各邊折半處）

乃自癸至甲聯為癸乙甲線又自此線向丁心平剖之成甲丁癸三角形面各分形俱如此切之成十等邊平

乃以甲丁為弦甲丙為句兩冪相減開方得股即丙丁也

次算分體之積

法以中高丙丁乘戊辛庚巳壬底而取其三之一為分形積

末以十二為法乘分形積得總積

簡法以分形中高乘底又四乘之即得總積三歸三因對過省用

算甲丙

甲丙乘甲辛又五乘之得戊辛庚巳壬五角面積甲丙辛角為五等邊之半角三十六度其餘角甲辛丙必五十四度

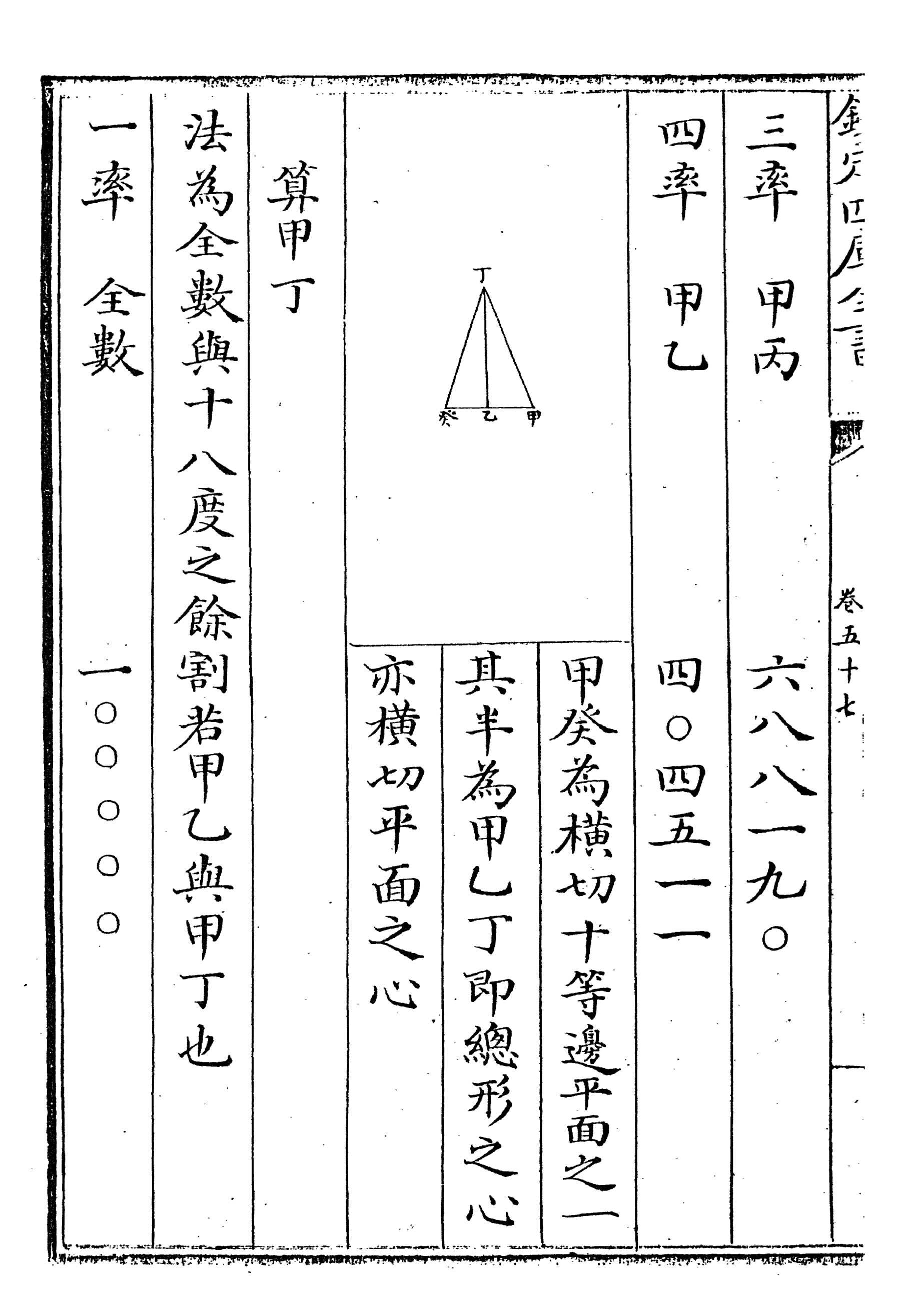
次算面上大横線即甲癸又全數三十六度之正弦若甲丙與甲乙也倍甲乙得甲癸

次算中高線丙丁

法為全數與七十二度之割線若甲乙與甲丁也因平切十等邊為三十六度半之為十八度其餘角七十二度即乙甲丁角

三率　甲丙　　　六八八一九〇

四率　甲乙　　　四〇四五一一



甲癸為橫切十等邊平面之一

其半為甲乙丁即總形之心

亦橫切平面之心

算甲丁

法為全數與十八度之餘割若甲乙與甲丁也

一率　全數　　　一〇〇〇〇〇

一率　全數　一〇〇〇〇〇

二率　五十四度切線　一三七六三八相乘得六八

三率　設根之半甲辛　五〇八一九〇〇

四率　甲丙　六八以全數除之減五位為畸零

算甲乙

法為全數與三十六度之正弦若甲丙與甲乙也

一率　全數　一〇〇〇〇〇

二率　三十六度正弦　〇五八七七九

法以甲丙乘甲辛五十得三千四百四十〇九半又五乘之得一萬七千二百〇四七五為五等邊邊各一百之平冪亦即十二等面分形之底積

算總積

用簡法以底積一七二〇四七五四四因之得六八九九〇以乘中高得七百六十八萬二千二百一十五八七四〇為十二等面之積

計開十二等面

二率　七十二度割線　三二三六〇七

三率　甲乙　四〇四五一一

四率　甲丁　一三〇九〇二五

算丙丁中高線

法以甲丁為弦　甲丙為句　求得股為丙丁

算得丙丁一百一十一三五二六為中高線亦即十二等面

形内渾圓之半徑

算五等邊面冪

一率　七六八二二一五　　例容
二率　一〇〇〇〇〇〇　　例邊上立積
三率　一〇〇〇〇〇〇　　設容
四率　〇一三〇一七〇　　求得設邊上立積
立方法開之得其根五十
與比例規解合與測量全義差四千一百七十四為
二百分之一
算辛丁庚丁戊丁並用又即為外切渾圓半徑

法以甲丁股冪一七一三五甲辛句冪〇二五〇〇并為弦冪一九六三五求得弦數一百四十〇為辛丁即外切圓半徑

計開

十二等面之數

設邊一百　其容積七百六十八萬二二一五

内容渾圓徑一百二十二　外切渾圓徑二百八十

捷法十二等面邊求外切内容之立方及外切之立圓

置十二等面邊為理分中末之小分求其大分為内容

立方邊內容立方邊自乘而三之開方得外切立圓全徑

又置十二等面邊為理分中末之小分求其全線為外切立方邊

一率　理分中末之小分　三十八一九六六〇一

二率　理分中末之大分　六十一八〇三三九八

或用理分中末之大分　理分中末之全分

三率　十二等面之邊

四率　內容小立方邊　即大橫線

又

一率　理分中末之小分

二率　理分中末之全分

三率　十二等面之邊

四率　外切立方邊

以十二等面邊減外切立方邊餘為内容立方邊

以内容立方邊加十二等面邊即外切立方邊

又捷法但以十二等面邊加大横線即小立方邊　即外切

立方之根

已寅巳卯俱平面容圓半徑

巳中為内容立圓半徑即分體中高

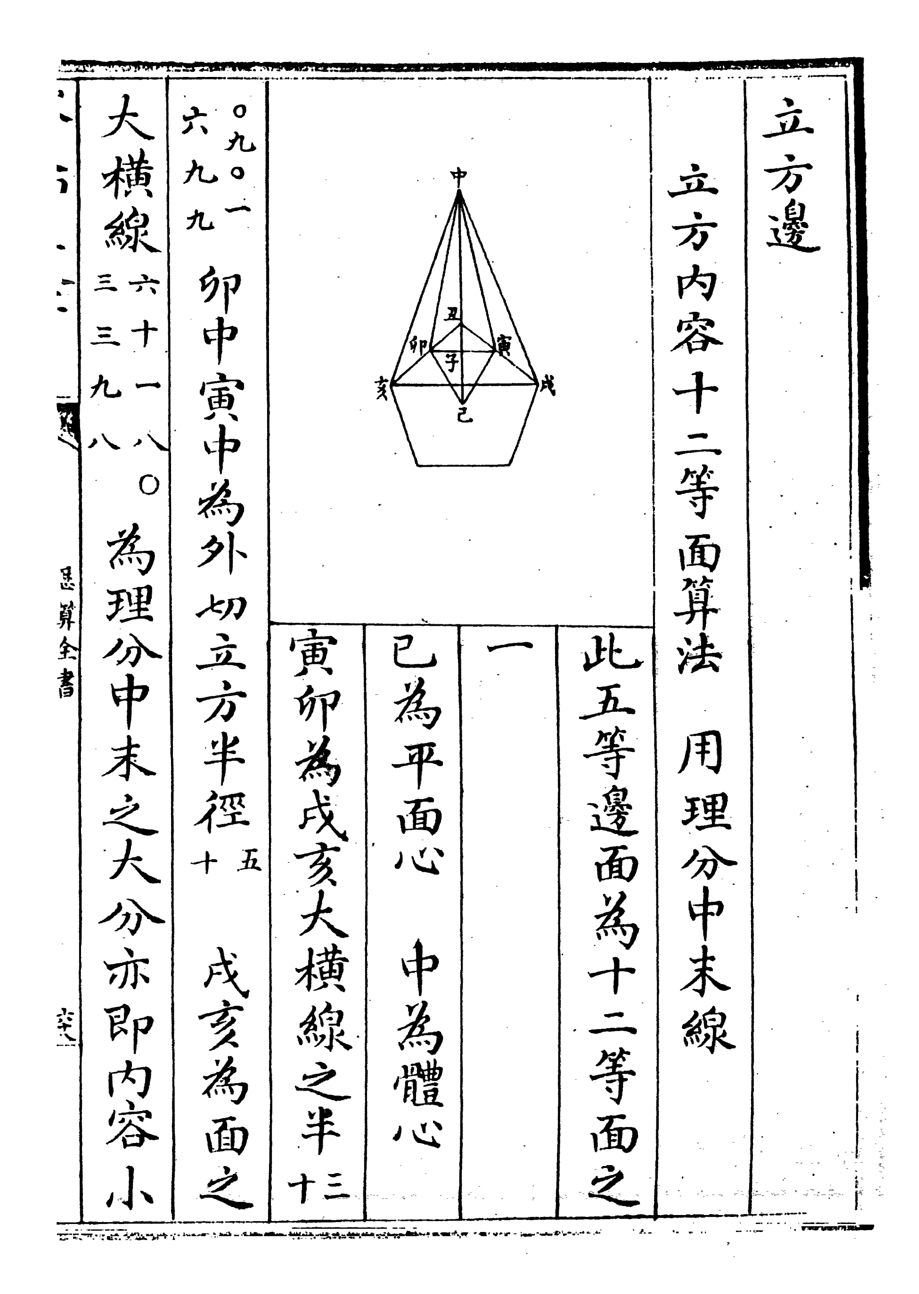
丑中為外切立圓半徑亥中戌中並同

設立方根一百為徑　半徑五十為寅中卯中　理分中末大分之半為寅卯三十〇九〇一六九九　又半之為寅子一十五四五〇八四九五為理分中末大分四之一

一率　全數　一〇〇〇〇〇

立方邊

立方內容十二等面算法　用理分中末線



此五等邊面為十二等面之

一

己為平面心　中為體心

寅卯為戌亥大橫線之半三十

卯中寅中為外切立方半徑五十　戌亥為面之

○九○一六九九

大橫線六十一八○三三九八　為理分中末之大分亦即內容小

倍卯丑得丑亥邊三十八一九六四即十二等面邊乃理分中末大分之大分也以此知大横線與五等邊為理分中末之全分與其大分之比例也

卯巳句冪〇六九〇九八　卯中弦冪二五〇〇〇〇相減為股冪一八〇九〇二　開方得巳中四十二五三二五為內容渾圓半徑

卯丑句冪〇三六四七四一二四三　卯中股冪二五〇〇　相併為弦冪二八六四七四一二四三　開方得丑中五十三五二三二為外切渾圓

二率　五十四度之割線　一七〇一三〇

三率　寅子　一十五四五〇八四九五

四率　寅己（即卯己）　二六二八六五

求得卯己為平面中垂線

一率　全數　一〇〇〇〇〇

二率　三十六度之切線　〇七二六五四

三率　卯己　二十六二八六五

四率　卯丑（即半邊）　一十九〇九八二

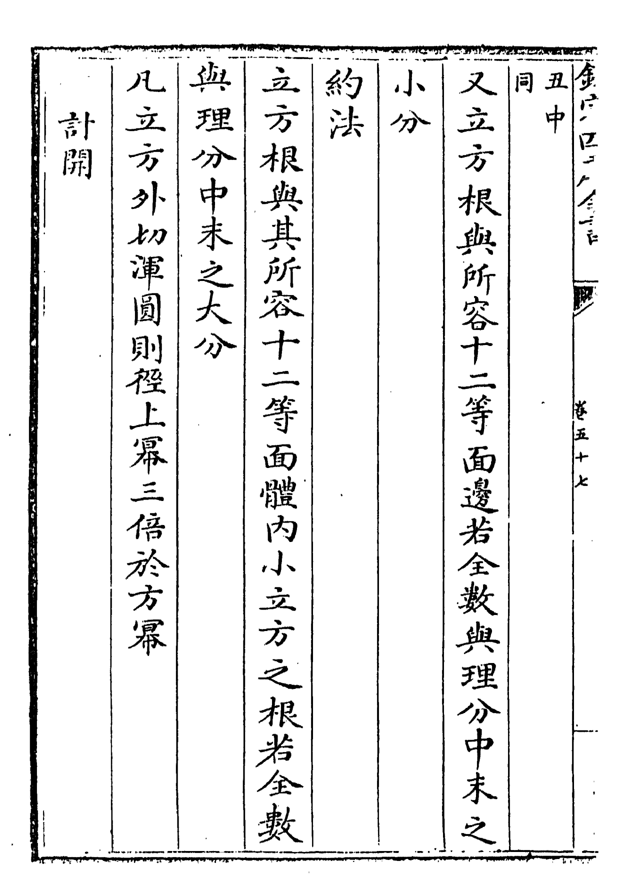
半徑

丑亥巳卯相乘五因二除為面冪以乘巳中而四因之得十二等面積

簡法

十二等面內容小立方六十一八〇三三九八即理分中末之大分益戌亥大横線倍大於寅卯故也　大横線即小立方之邊

以大横線之冪三因之開方得亥中為外切渾圓半徑



丑中
同

又立方根與所容十二等面邊若全數與理分中末之小分

約法

立方根與其所容十二等面體内小立方之根若全數與理分中末之大分

凡立方外切渾圓則徑上冪三倍於方冪

計開

立方設徑一百

內容十二等面邊三十八一九六六〇一

內容小立方邊六十一八〇三三九八

外切渾圓徑一百〇七〇四六六二五 即丑中亥中倍數

外切渾圓半徑五十三五二三三 即丑中亥中

內容渾圓半徑四十二五三二五 即己中 為分體中高

內容渾圓全徑八十三〇六五一

內容二十等面邊四十四七二一一

寅卯點為邊折半處中為體心

卯中為外切立方半徑設五十

卯亢為外切立方全徑設一百

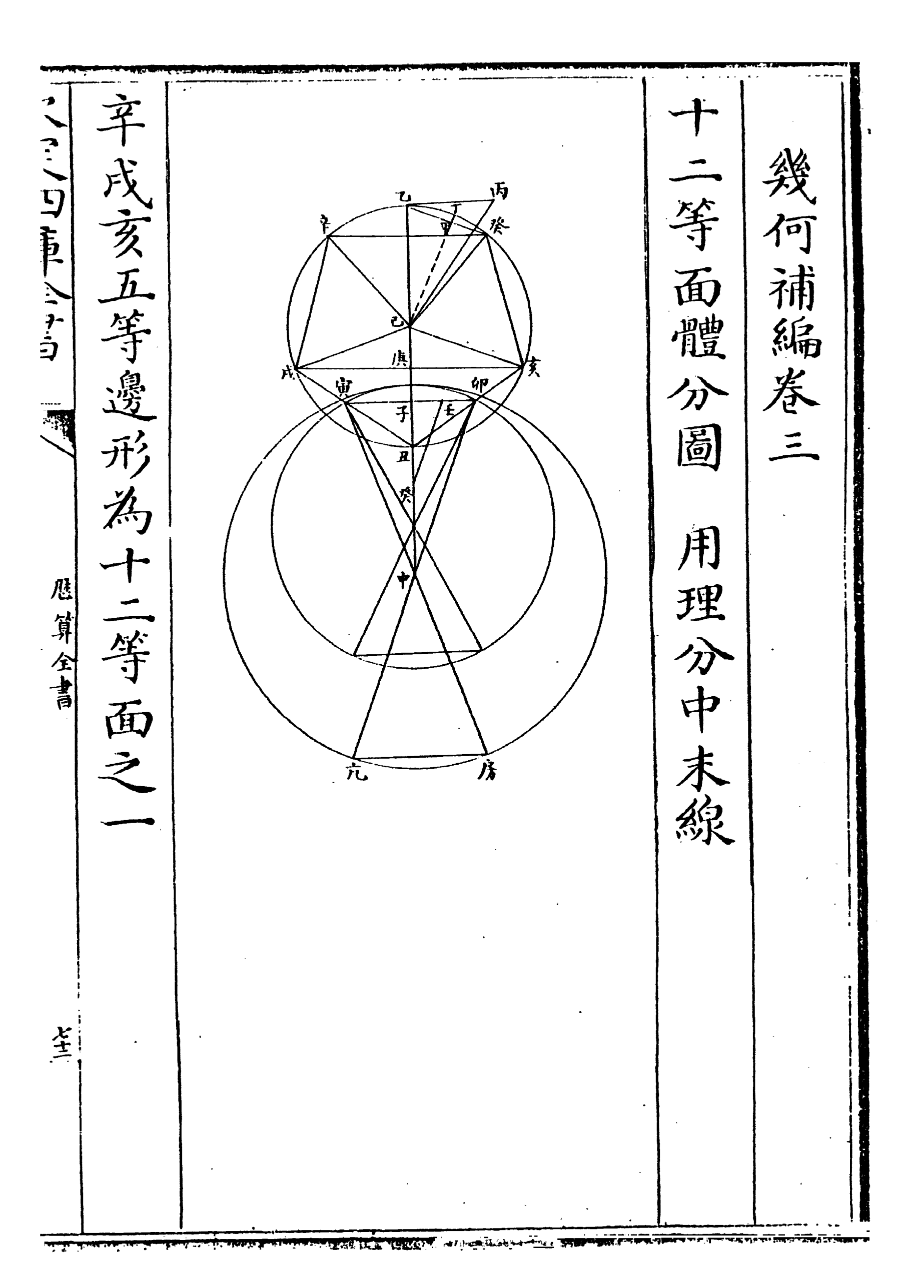
寅卯線與卯中半徑若理分中末之大分與其全數也

在圓內為三十六度之分圓　辛癸辛戌等俱七十二度之分圓

乙巳為半徑巳丑同　乙癸為三十六度之通弦

乙巳半徑與乙癸亦若理分中末之全數與其大分也

十二等面體分圖 用理分中末線



辛戌亥五等邊形為十二等面之一

三率　子寅　一十五四五〇八四九五

四率　丑寅半邊　一十九〇九八三

倍丑寅得丑戌三十八一九六六與簡法合

論曰凡十二等面從其半邊之點如寅聯為線以剖至體之心中點則所剖成寅中卯三角形平面必為全圓十之一即寅中卯角必三十六度而中寅或中卯兩弦與寅卯底若理分中末之全分與其大分矣

又十二等面在立方形内必以卯中或寅中自心至邊之

故乙己癸三角形與卯中寅相似

若取乙丙切線如乙癸之度則丙巳必同亥癸邊即七十二

度通弦折半於甲則甲乙為十八度正弦再於寅卯線取子壬

如乙甲取壬癸如乙巳半徑引巳子至癸中末乃自卯作

線至中與壬癸平行因得寅中與卯中等則寅中卯即

為横切之半面

一率　全數　一〇〇〇〇〇

二率　三十六度割線　一二三六〇七

必六十一八〇三三九八而竟同理分中末大分之數也

既得此大横線則諸線可以互知

丑
寅
卯
酉
亥
戌
己

試先求邊　法為酉戌半大横線與丑戌等邊若全數與三十六度之餘割線也

一率	全數	一〇〇〇〇〇
二率	三十六度割線	一二三六〇七
三率	酉戌半大横線	三十〇九〇一六九九九

線當立方之半徑是立方半徑與十二等面之寅卯線亦若理分中末之全與其大分也　若設立方半徑一百則寅卯必六十一八〇三三九八如理分中末之大分也今設立方全徑一百其半徑五十則寅卯亦必三十〇九〇一六九九如大分之半矣　寅卯二點既在丑戌丑亥兩邊之折半則戌亥大橫線必倍大於寅卯而與理分中末大分之全相應為六十一八〇三三九八　此皆設立方半徑五十之數也而半徑五十其全徑必一百故知設徑一百則十二等面之大橫線

一面之平冪二千五百一十〇一三七〇
內容渾圓半徑四十二四三二五即分體五面立錐之中
高已中中高三之一一十四一四四一
分積三萬五千四百九十五八四七三其形為五面立錐
其體積為十二之一
全積四十二萬五千九百五十〇一六七六
外切立方根一百　其積一百萬
外切渾圓徑一百〇七〇四六六

四率　丑戌全邊　三十八一九六六

論曰五等邊各自其角作線至心分形為五則各得七十二度角如丑己戌等其角得戌己丑之角皆七十二度其半必三十六度如寅己丑之己半正三十六度而丑戌酉與丑己寅皆句股又同用丑角則戌角與己角等為三十六度

十二等面求積

平面中垂線卯己二十六二八六五

邊即丑亥丑戌等三十八一九六六　半邊即丑卯丑寅一十九〇九八三

與大分之比例是矣若內立方之內又容立圓則小立圓之徑與小立方之徑同而外渾圓與外立方之徑不似未可以前比例齊之

若十二等面外切大立方大立方之外又切大立圓大立圓外又切十二等面則大立圓與內容小立圓亦必若理分中末之全分與其大分而外切十二等面與十二等面亦必若理分中末之全分與其大分何則皆外切立方與內容立方之比例也

内容立方根六十一八〇三
三九八
外切立方與體内容立方徑之比例若理分中末之全
分與其大分
又若外切立方之外又切十二等面體體外又切大立
方則大立方之徑與令所算外切立方徑亦若理分中
末之全分與其大分而外切之十二等面與其内十二
等面徑亦必若理分中末之全分與其大分也
孔林宗云外立方與内立方之徑為理分中末線全分

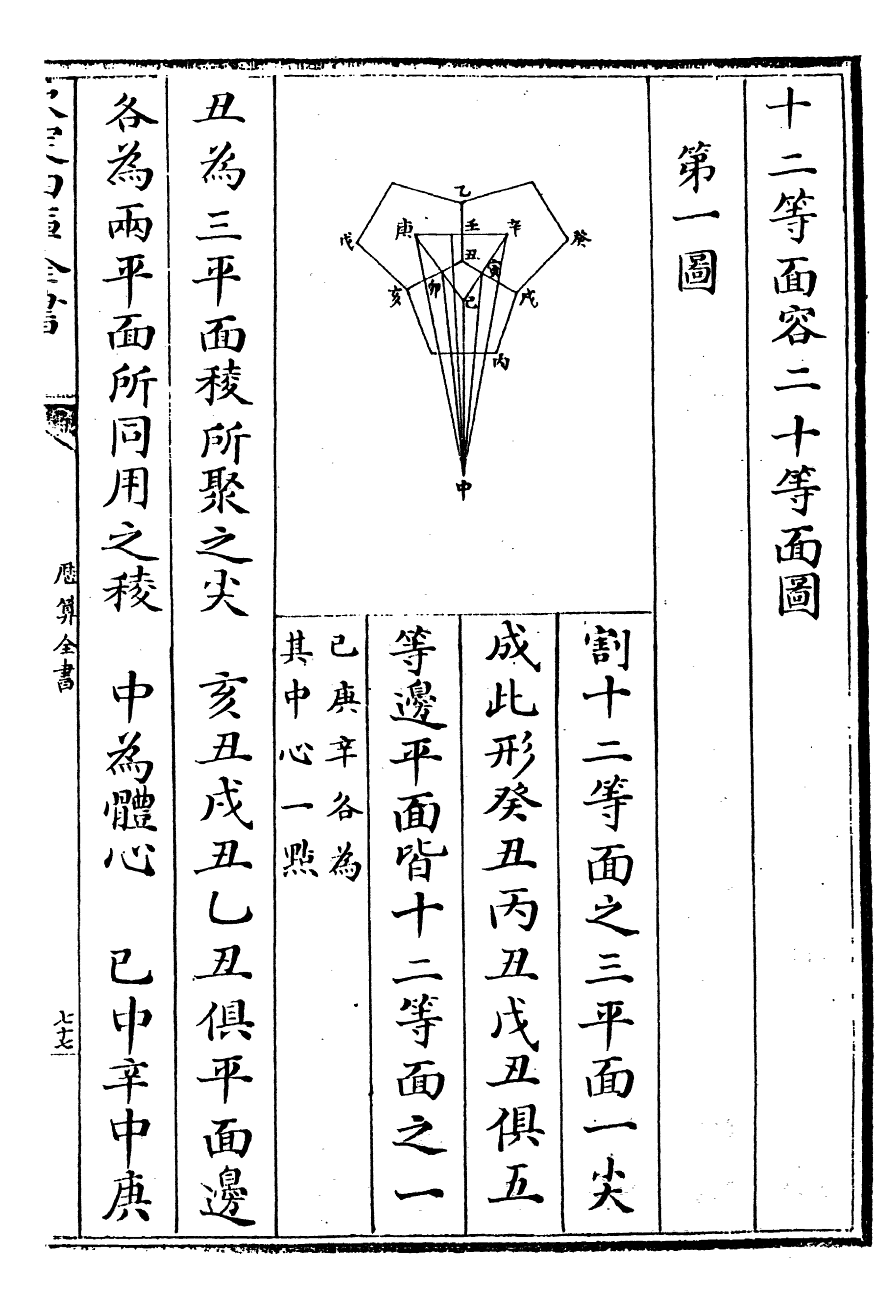
中皆内切渾圜半徑亦内容二十等面自尖至體心半徑　己卯庚卯己寅辛寅辛壬俱平面中垂線　寅卯壬皆平面邊折半之點

第二圖

内容二十等面體各自其邊剖至心成此分體為内容體二十分之一　辛庚己三角尖即十二等面之中心原點

十二等面容二十等面圖

第一圖



割十二等面之三平面一尖成此形癸丑丙丑戊丑俱五等邊平面皆十二等面之一

己庚辛各為其中心一點

丑為三平面稜所聚之尖　亥丑戊丑乙丑俱平面邊各為兩平面所同用之稜　中為體心　己中辛中庚

等面之一邊

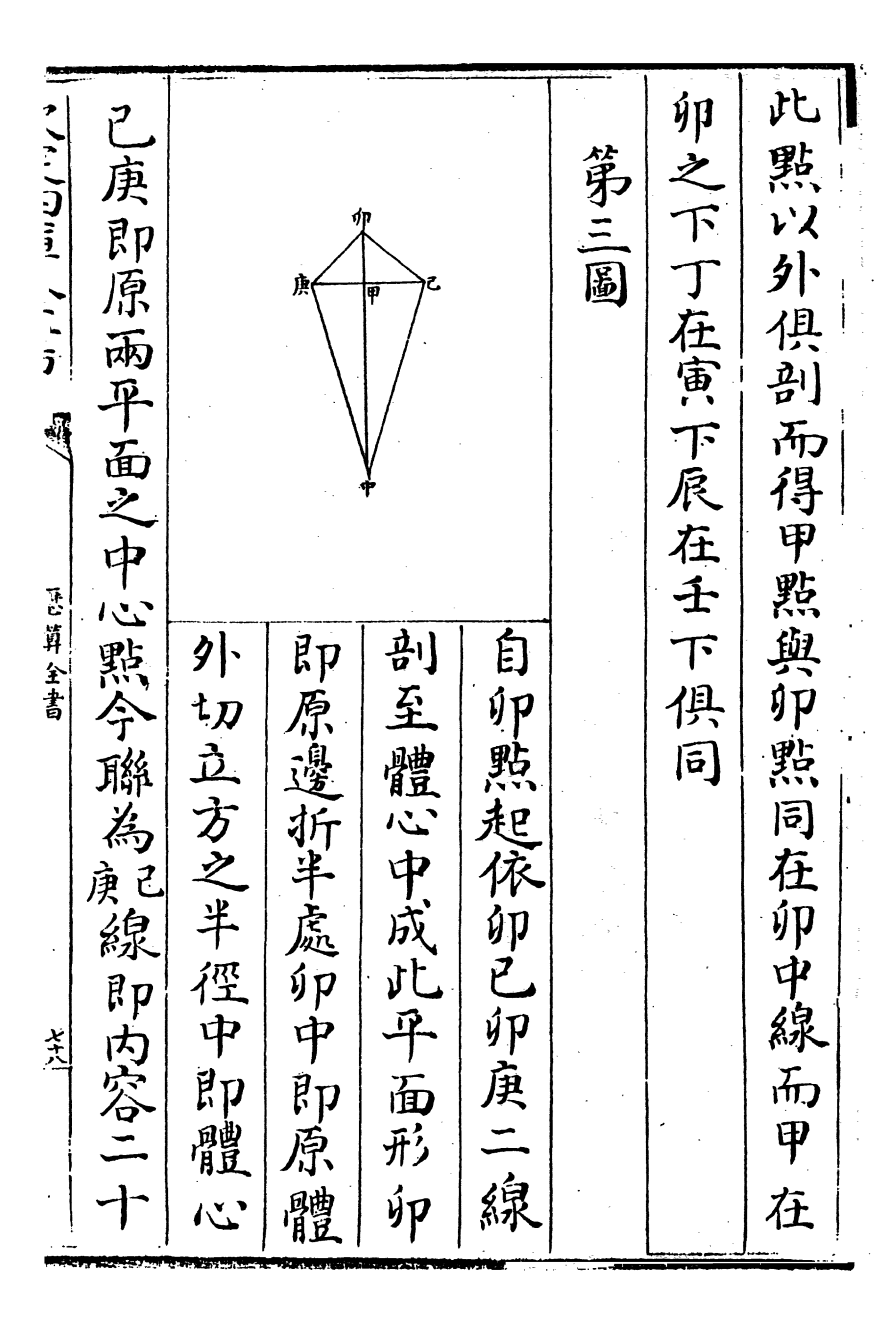
己中庚即内切二十等面分體之立面乃三角錐體之一面　甲中為内切二十等面分體之斜垂線　觀第二圖可明第二圖角點居剖内三角之中心正對原體之丑尖而在其下故角中為内容分體之正高而甲中為斜垂線也

今求己庚線即内容二十等面之邊

法於卯中外切立方半徑内求甲中以相減得卯甲甲為股用與卯己弦原體之面上中垂線兩冪相減開方得句為己甲倍之得

此點以外俱剖而得甲點與卯點同在卯中線而甲在卯之下丁在寅下辰在壬下俱同

第三圖



自卯點起依卯己卯庚二線剖至體心中成此平面形卯即原邊折半處卯中即原體外切立方之半徑中即體心己庚即原兩平面之中心點今聯為己庚線即內容二十

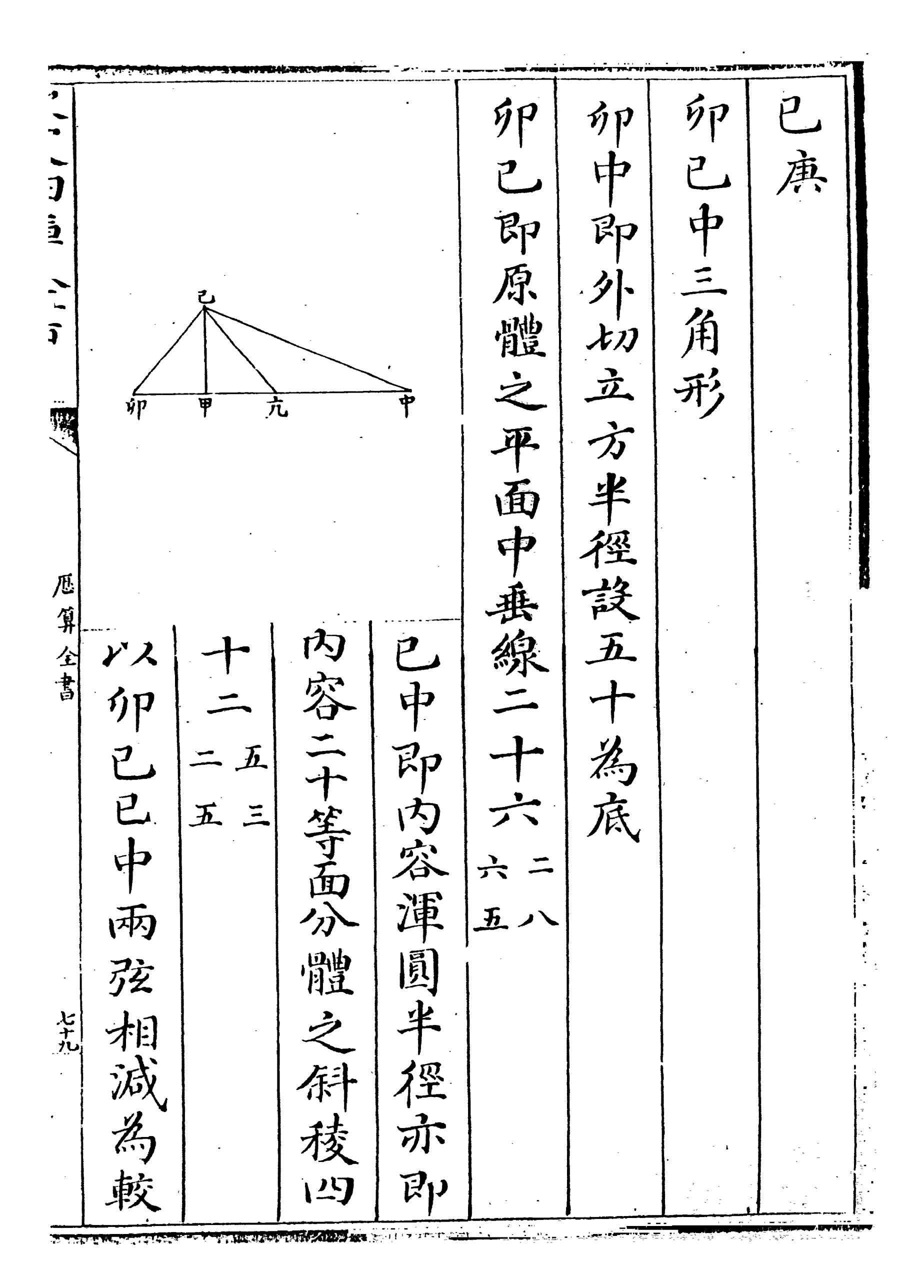
相并為總以總乘較為實卯中底五十為法除之得亢中二十二(三六〇六)以減卯中餘二十七(六三九四)為亢卯折半得一十三(八一九七)為卯甲

計開

立方根設一百其半五十(即卯中)亦為十二等面自體心至邊

十二等面之平面中垂線(即卯己)二十六(二八六五)

十二等面內容渾圓半徑(即己中)四十二(五三二五)亦為內容



巳庚

卯巳中三角形

卯中即外切立方半徑設五十為底

卯巳即原體之平面中垂線二十六二八六五

巳中即內容渾圓半徑亦即內容二十等面分體之斜稜四十二五三二五

以卯巳巳中兩弦相減為較

卯甲自乘得一百九十〇九八四一為股冪　相減餘四百九十九九九五九為勾冪　開方得己甲二十二三六〇五倍之得己庚四十四七二一一即為內容二十等面邊

此法甚確亦且甚捷無可疑者偶於枕上又思得一法借燈體分形之三角錐以求十二等面內容二十等面分體之三角錐是以錐體相截而知其所截之

二十等面自尖角至體心分體以為錐體之稜

卯巳中之較一十六二四六〇總六十八八一九〇較總相乘一千一百一十八〇三三四為實卯中五十為法除之得中亢二十二三六〇六以中亢減卯中五十餘二十七六三九四為亢卯折半得一十三八一九七為卯甲以卯甲減卯中餘三十六一八〇三為甲中即內容二十等面分體之斜垂線

卯巳自乘得六百九十〇九八〇〇為弦冪

心

第二圖

聯寅卯卯壬壬寅三線為平三角面橫剖之又各依寅中卯中壬中線剖至體心中則成三角錐體二其一為丑寅卯壬體是三角錐而稍扁者也其一為寅卯壬中體是三角錐而稍長者也其寅卯壬三角平面為扁形之底

邊即為內容二十等面之邊

第一圖

丑為三平面所聚之尖　丑戊丑亥丑乙皆兩平面同用之稜　己庚辛皆五等邊平面之心　己寅己卯等皆平面心至邊垂線　己午丑為平面心對角線　寅卯壬皆平面邊折半之點　寅中卯中壬中為體心至邊線即外切立方半徑　中為

面分體中之分體其辰甲丁面與己庚辛胳合為一蓋己庚辛者内容二十等面之一面各於邊折半為甲丁辰而聯之為線則成小三角於中故辰丁等線皆居己庚線之半而甲中原為二十等面分體之斜垂線者今則為三角錐之楞

第四圖

己牛丑即原平面從心至角尖之線丑斗角中即原體自

又為長形之面其寅卯等線與寅中卯中之比例皆若理分中末之大分與其全分也其扁形錐既剖而去則成圓燈所存長錐即燈形分體之一平面心之點為斗在丑尖下與牛點平故丑牛為弦則斗牛如勾而丑牛之距如股也

第三圖

又於圓燈分體剖去辰甲丁之一截則成甲丁辰中三角錐乃十二等面內容二十等

此兩形相似而比例等　法為卯中與卯寅若甲中與甲丁也

又斗中為圓燈分體之中高其平面為寅卯壬角中為截體之中高其平面為丁甲辰此兩體相似而線之比例等　法為斗中高與寅卯濶若角中高與甲丁濶

先求丑斗高

用截去扁三角錐以斗卯即寅卯之半自乘冪三分加一以減丑卯冪為丑斗冪開方得丑斗高

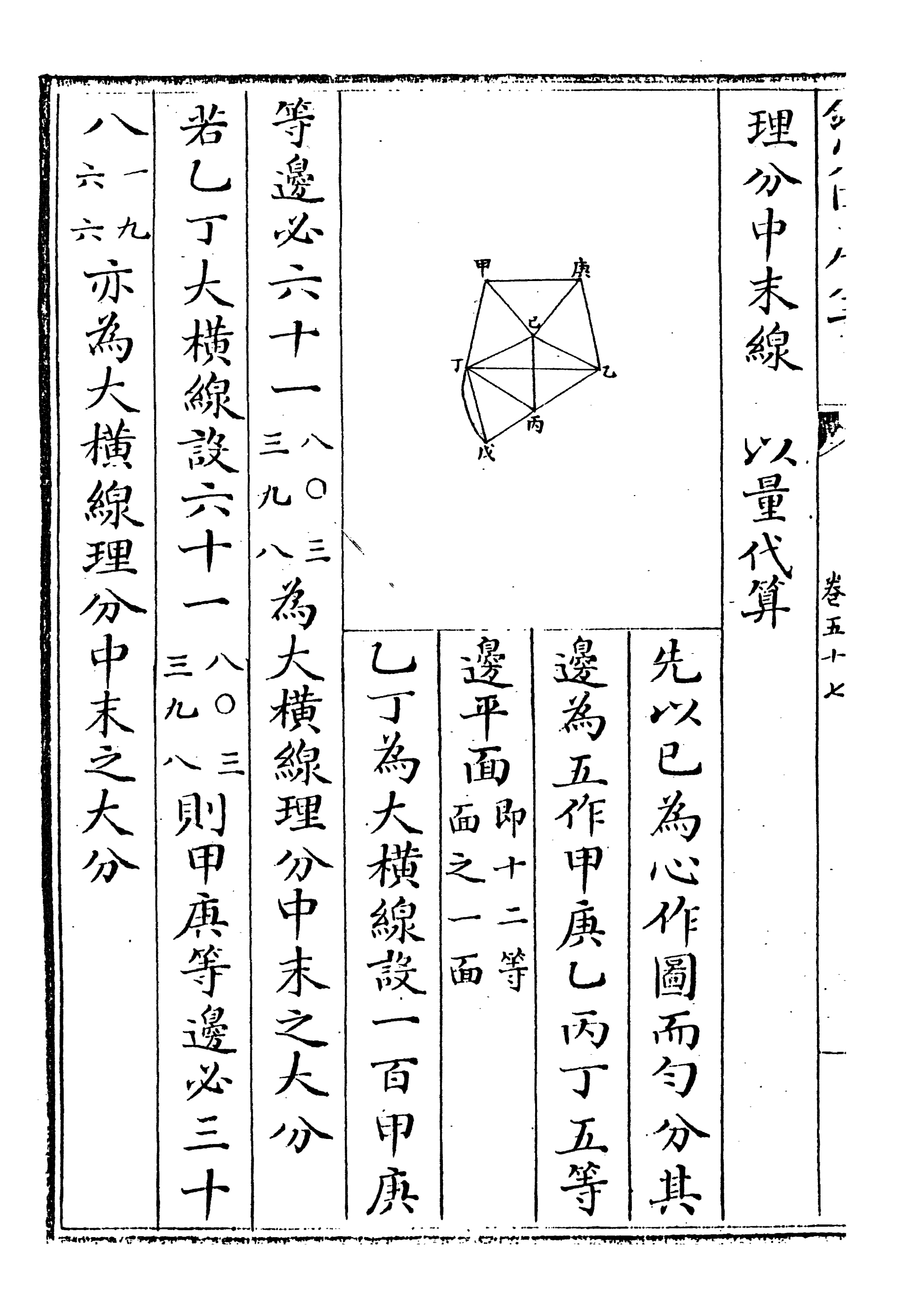
尖至中心之線又為外切渾圓半徑

依第二圖截丑巳於牛而橫剖之亦截丑中於斗成丑斗牛勾股形　又依第三圖截斗中於角成丑角巳勾股形此兩勾股相似而比例等

法為丑牛與丑斗若丑巳與丑角也

第五圖

寅中卯三角形為圓燈分體之立面截為甲丁中三角形



理分中末線　以量代算

先以己為心作圖而匀分其邊為五作甲庚乙丙丁五等邊平面即十二等面之一面乙丁為大橫線設一百甲庚等邊必六十一八〇三三九八為大橫線理分中末之大分若乙丁大橫線設六十一八〇三三九八則甲庚等邊必三十八一九六六亦為大橫線理分中末之大分

次求丑角高

用巳丑對角線乘丑斗以丑牛除之得丑角高　其丑牛線以牛卯冪減丑卯冪開方得丑牛　巳寅丑寅兩冪并開方為巳丑

末求巳庚線

用丑角減丑中得角中　又用丑斗減丑中得斗中以角中乘寅卯以斗中除之得甲丁倍甲丁得巳庚為內容二十等面之邊

方根而以外立方根除大横線冪必仍得十二等面之邊矣

求理分中末線捷法　用前圖

作五等邊平面　求其大横線乙丁　聯兩角為線即得之

次以大横線之一端如乙為心其又一端如丁為界作丁戊圓分乃引五等邊與圓分相遇如引乙丙至戊與圓分遇于戊則相遇處如戊至圓心如乙為全分即乙丁大横線即乙戊亦原邊為大分即乙丙

設立方一百內容十二等面邊三十八一九六六為理分中末之小分亦即大分之大分

十二等面內又容小立方其邊與十二等面之大橫線等六十一八〇三三九八為大立方邊一百與十二等面邊三十八一九六六之中率何也大立方一百乘十二等面邊三十八一九六六開方得根即小立方及大橫線六十一八〇三三八九

若大橫線自乘之冪以十二等面邊除之即仍得外立

分丁丙亦爲大分矣准此又破丙角可以遞求於無窮

諸體比例

凡諸體之比例有三

一曰同邊之比例可以求積

一曰同積之比例可以求邊

一曰相容之比例可以互知

内相容之比例亦有三

一曰立圓内容諸體之比例　所容體又容立圓

引出餘邊為小分即丙戊

又法

作平三角使兩角如戊如丁俱倍大於一角如乙末乃破一倍角平分之作線至一邊如平分丁角為兩作丁丙線至乙戊邊則其斜線即為理分中末之大分即丁丙也

解曰倍破角則與小角等如破丁角為兩皆與乙角等而乙丙丁形之乙丁兩角同大則乙丙丁丙兩弦亦同大而乙丙既為大

一曰立方內容諸體之比例　所容體又容立方

一曰諸體自相容之比例（即同徑同高之比例）或或兩體互相容

或數體遞相容

等積之比例　比例規解所用今攷定

立方積　一〇〇〇〇〇〇　其邊一百

四等面積　一〇〇〇〇〇〇　其邊二百〇四

八等面積　一〇〇〇〇〇〇　其邊一百二十八

十二等面積　一〇〇〇〇〇〇　其邊五十

二十等面積　一〇〇〇〇〇〇　其邊七十七

方燈

圓燈

凡方燈依楞剖之縱橫斜側皆六等邊平面凡圓燈依楞剖之縱橫斜側皆十等邊平面故皆有法形體等邊之比例　測量全義所用今攷定

立方邊　一〇〇　積一〇〇〇〇〇〇

方燈體邊　〇七〇七一〇六積〇八三三三三三

邊一〇〇　積二三五七〇二一

八等面邊〇七〇七一〇六　積〇一六六六六六

邊一〇〇　積〇四七一四〇四

四等面邊一〇〇　積〇一一七八五一

十二等面邊一〇〇　積七六八二二一五

二十等面邊一〇〇　積二一八一八二二

圓燈體邊〇三〇九〇一七　積〇二九〇九二九

邊一〇〇　積〇九八五九一六

等徑之比例　皆立方所容

立方徑　一〇〇積一〇〇〇〇〇〇　邊一〇〇

内容方燈徑　一〇〇積〇八三三三三三　邊〇七〇七一〇六

内容四等面徑　一〇〇積〇三三三三三三　邊一四一四二一三

内容八等面徑　一〇〇積〇一六六六六六　邊〇七〇七一〇六

内容立圓徑　一〇〇積〇五二三八〇九

内容二十等面徑　一〇〇積〇五一五二二六　邊〇六一八〇三四

内容十二等面徑　一〇〇積〇四二五九五〇　邊〇三八一九六六

內容圓燈徑　一〇〇積〇二九〇九二九　邊〇三〇九〇一七

右以立方為主而求諸體

內立方及燈體之徑為自面至面

四等面十二等面二十等面之徑皆自邊至邊以邊折半處作垂線至對邊折半處形如工字四等面則上下邊遥相午錯如十字

八等面之徑為自尖至尖　然皆以其徑之兩端正切於立方方面之中心一點立方面其相切亦必六點

求積約法

凡立方内容諸體皆與立方之六面同高同濶　則燈形積為立方積六之五　四等面積為立方積三之一

八等面積為立方積六之一　以上三者皆方斜比例

燈形及八等面皆以方求斜法以邊自乘倍之開方得外切立方徑以徑再自乘得立方積取六之五為燈六之一為八等面積

四等面則以方求其半斜法以邊自乘半之開方得外

切立方徑以徑再自乘為立方積取三之一為四等面積

立圓在立方內則其積為立方積二十一之十一

謹按方圓比例祖率圓徑一百一十三圓周三百五十五見鄭世子律學新說較徑七周二十二之率為密又今推平圓居平方四百五十二分之三百五十五較十四分之十一為密又推得立圓居立方六百七十八分之三百五十五較二十一分之十一為密

准立方比例以求各體自相比　皆以同高同闊同為立方所容者較其積

燈內容同高之八等面　為八等面得燈積五之一

又立圓內容同高之八等面　為八等面得圓積六十六之二十一（即二十二之七）　二者皆同高而又能相容

用課分法母互乘子得之

		互得	約得	
八等面	六之一	二十一	七	若徑
立圓	二十一之十一	六十六	二十二	若圍

四等面　三　之　一　二十一　七
　　　互得
立圓　二十一之十一　三十三　十一
　　　約得

此三者但以同高同為立方所容而不能自相容若相容則不同高

凡立方之燈形内又容立方則内小立方邊與徑得外立方三之二體積為二十七之八面冪為九之四

凡燈容立方以其邊為方而求其斜為外切之立方邊取方斜三之二為内立方邊

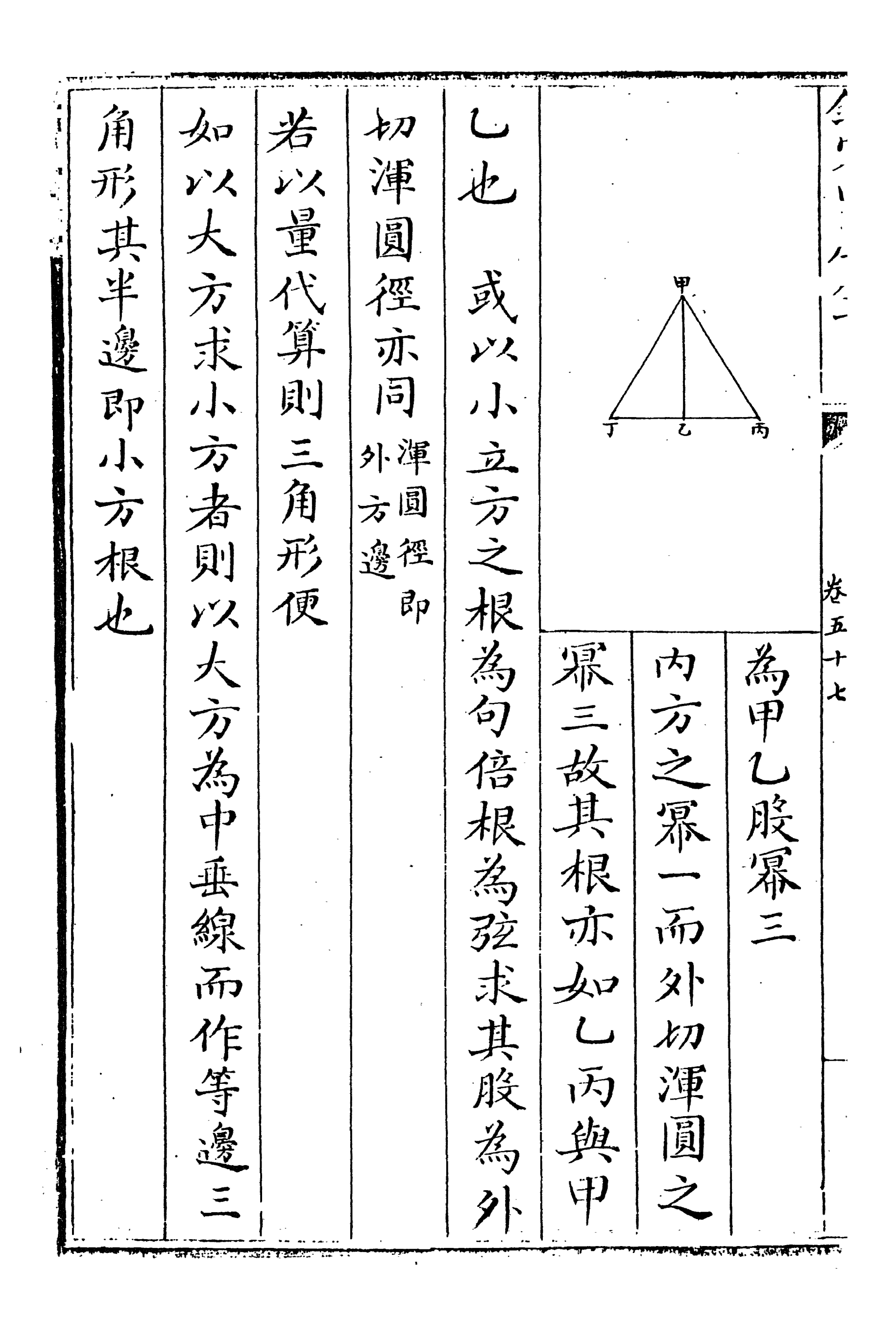
准此而知立圓内容八等面其積之比例若圍與徑也

又立方内容十二等面其内又容八等面　又立方内容二十等面其内又容八等面　二者亦同高而能相容

同高之四等面積爲燈積五之二即十之四　以燈面四因退位得四等面積

同高之八等面積爲四等面積二之一

同高之四等面積爲立圓積十一之七



為甲乙股冪三內方之冪一而外切渾圓之冪三故其根亦如乙丙與甲乙也　或以小立方之根為句倍根為弦求其股為外切渾圓徑亦同渾圓徑即外方邊

若以量代算則三角形便

如以大方求小方者則以大方為中垂線而作等邊三角形其半邊即小方根也

立方邊一〇〇　面冪一〇〇〇〇　體積一〇〇〇〇〇〇

燈邊〇七〇七一〇六　面冪〇五〇〇　體積〇八三三三三三

小立方邊〇六六六六六六　面冪〇四四四四四四　體積〇二九六二九六

凡方內容圓圓內又容方則內小方之冪得大方三之一

捷法以小方根倍之為等邊三角形之邊而求其中垂線即外切立圓之徑亦即為外大方之邊

如圖三邊既等則乙丙得甲丙之半若乙丙一其冪亦一而甲丙二其冪則四以乙丙句冪一減甲丙弦冪四所餘

或用大方為股而作句股形使其句為弦之半即得之

按法句股形使甲角半於丙角則弦倍於句而句與股如小立方根與大方根

或以甲角作三十度而自乙作垂線引之與甲丙弦線遇于丙則乙丙即圓所容方之根

又按先有大方求小方者取大方根倍之為等邊三角形之邊而求其中垂線以三歸之即得

凡立方内容方燈燈内又容立圓圓内又容圓燈燈内

又容八等面凡四重在内其外切於立方也皆同點立切

方有六處所同者皆在其方面之最中一點若從此一點刺一針則五層悉透内惟方燈以面切面不可言點若言點則有十二皆切在立方邊折半處

凡立方内容方燈燈内又容十二等面體體内又容圓燈燈内又容八等面凡四重在内其切于立方也皆同處

凡六處皆在立方面内方燈體以面切面十二等面以邊切餘皆以尖切尖切者皆每面之最中點

凡立方内容方燈燈内又容二十等面體體内又容圓燈燈内又容八等面同上

凡立方方燈立圓十二等面二十等面圓燈内所容之八等面皆同大

凡立方内容四等面體體内又容八等面其切立方皆同處四等面以邊切為立方六面之斜八等面以尖切居立方各面中心即四等面邊折半處

准此而知立方内所容之八等面與四等面所容之八等面亦同大且同高各體中所容八等面皆同大因此可知

凡立圓内容十二等面體　又容立方其立方之角同

十二等面之尖而切於立圓故立圓内所容之立方與十二等面内所容之立方同大

凡二十等面體内容立圓　内又容立方立方之角切立圓以切二十等面之面故立圓所容之立方與二十等面内所容之立方必同大

凡二十等面體内容立圓　内又容十二等面體體内又容立方此立方之角切十二等面之角以切立圓而切于二十等面之面皆同處

凡諸體能相容者其相容之中間皆可容立圓此立圓為外體之內切圓亦為內體之外切圓

惟八等面外切二十等面十二等面四等面及圓燈其中間難著立圓何也八等面之切圓燈以尖切尖而其切四等面十二等面二十等面則以尖切邊故其中間不能容立圓

其他相切之中間能容立圓者皆以內之尖切外之面

凡諸體在立方內即不能外切他體惟四等面在立方

內能以其角同立方之角切他體故諸體所容四等面之邊皆與其所容立方之面為斜線

凡諸體相容其在內之體為所容其在外之體為能容能容與所容兩體之相切必皆有一定之處

凡相容兩體之相切或以尖或以邊即體之稜或以面

渾圓在立方內為以面切面其相切處只一點皆在立方每面之中央立方六面相切凡六點

立方在渾圓內為以尖切面立方之角有八故相切有八點有一點不

相切者即非正相容也

渾圓在諸種體內皆與在立方內同謂其皆以面切諸體之面而切處亦皆一點也然其數不同如四等面則切點有四方燈則切點有六八等面則切點有八十二等面及圓燈則切點有十二二十等面則切點有二十其切點之數皆如其面之數而皆在其面之中央也方燈則以其方面為數圓燈則以其五等邊之面為數而不論三角之面者何也三角之面距體心遠故不能內

切立圓也

諸體在渾圓内皆與立方在渾圓内同謂其皆以各體之尖切渾圓之面也其數亦各不同如四等面則切點亦四方燈則切點十二八等面則切點六十二等面則切點二十二十等面則切點十二圓燈則切點三十皆如其尖之數也

四等面在立方内以邊稜切立方之面四等面有六稜以切立方之六面皆徧其四尖又皆切於立方之角

十二等面二十等面在立方內皆以其邊稜切立方之面兩種各有三十稜其切立方只有其六以立方只有六面也

此三者為以楞切面

八等面在立方內以尖切面凡六點　圓燈在立方內亦以尖切面有六點皆在立方面中尖與八等面同

方燈在立方內則以面切面皆方面也方燈之方面六亦與立方等也其十二尖又皆切於立方之十二邊楞

皆在其折半處為點

十二等面與二十等面遞相容皆以内體之尖切外體之面

十二等面在八等面内以其尖切八等面之面體有二十尖只用其八也

方燈在八等面内亦以面切面而皆三角面方燈之三角面有八數相等也又其尖皆切於八等面各稜之中央折半處稜有十二與燈之尖正等也

圓燈在十二等面內以面切面皆五等邊平面也圓燈體之五等邊平面原有十二故也又皆以其尖切十二等面之邊楞而皆在其中半

圓燈在二十等面內亦以面切面皆三角平面也圓燈體之三角平面原有二十故也又皆以其尖切二十等面之邊楞而皆在其中半

問十二等面與二十等面體勢不同而圓燈之尖皆能切其楞邊何也曰圓燈有三十尖而兩等面體皆有三

十楞故也

凡能容之體皆可改為所容之體遞相容者亦可遞改

如立方容圓即可刓方為圓渾圓容方即可削圓為方遞相容者如立方內容渾圓圓內又容十二等面體體內又容二十等面即可遞改

凡所容之體皆可補為能容之體皆以數求之

如立方外切立圓以其尖角則求立方心至角之線為立圓半徑

凡以面切面者其情相通

如方燈以其方面切立方面又能以其三角切八等邊面則此三者皆方斜之比例也

又如圓燈以其五等邊面切十二等面又能以其三角面切二十等面則此三者皆理分中末之比例也

若反用之而令立方在方燈之內則立方之尖所切者必三角面若八等面在方燈之內則其尖所切又必方面也

若令十二等面在圓燈內則所切者必三角面而二十

等面居圓燈内所切者又必五等邊面也故曰其情相通

諸體相容

凡立圓立方皆可以容諸體

凡立圓内容立方立方内又可容立圓兩者不離他體可以相生而不窮

凡立圓内容立方此立方内又可容四等面四等面又可容立圓三者以序進亦可以不窮

凡立圓內容立方又容四等面四等面在立方內以其尖切立圓與立方尖所切必同點

凡立圓容四等面在立圓所容立方內必以其楞為立方面之斜依此斜線衡轉成圓柱形必為立圓之所容而此柱形又能含立方

外圓者柱之底若面內方者立方之底若面直而斜者四等面之邊

凡四等面體在立圓內任以一尖為頂以所對之面為底旋而作圓錐此錐體必為立圓之所容而不能為立方之容

此兩體雖非正相容體然皆有法之體

凡立方內可容八等面八等面又可容立方而相與為不窮

凡立方有六等面八尖八等面有八等面六尖故二者相容則所容體之尖皆切於為所容大體之面之中央

而等

凡立方內容立圓此立圓內仍容八等面其八等面尖切立圓之點即可為切立方之點

八等面內容立圓此立圓內仍容立方則立方尖切立圓之點亦即可為其切八等面之點

凡立圓可為諸等面體所容其在諸體內必以圓面一點切諸體之各面此一點皆在其各等面之中心而等而徧

凡八等面内容立圓仍容立方　立方内仍容四等面而四等面以其角切立方角即可同立方角切立圓以切八等面疊串四體皆一點相切必在八等面各面之中心

立方設一百内容二十等面邊六十一八〇三三九八内又容立圓也十三四一七二

簡法取内容立圓徑羃三之一開方得内容小立方再以小立方為理分中末之全分而求其大分得内容十

二等面邊

凡十二等面二十等面皆能為立圓之所容皆以其尖切渾圓凡十二等面二十等面皆能容立圓皆以各面之中心一點正與渾圓相切

凡十二等面與二十等面可以互相容皆以內體之尖切外體之各面中心一點

凡十二等面內容渾圓渾圓內又容二十等面與無渾圓者同徑二十等面內容渾圓渾圓內又容十二等面亦

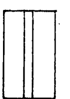
與無渾圓同徑何也渾圓在各體内皆以其體切於外體各面之中心點而此點即各内體切渾圓之點故也

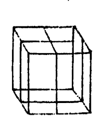
以上皆可以迭串相生而不窮

凡十二等面内容渾圓渾圓内又容十二等面亦可以相生不窮

二十等面與渾圓遞相容亦同

凡立方内容十二等面皆以十二等面之邊正切於立方各面之正中凡六皆遥相對如十字





二十等面以邊切立方之圖

假如上下兩面所切十二等面之邊横則前後兩面所切之邊必縱而左右兩面所切之邊又横若引其邊為周線則六處相交皆成十字

立方内容二十等面邊亦同

凡各體相容皆以内之尖切外之面惟立方内容四等面

十二等面以邊切立方之圖

則以角而切角立方内容十二等面二十等面則以邊而切面